Enero 2010 A ejercicio 6

> **Ejercicio 6** La cónica de ecuación $x^2+y^2-xy+x+y+7=0$ es: A) Una circunferencia; B) Una elipse; C) Degenerada; D) Ninguna de las anteriores.

Escribimos la cónica en forma matricial

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Por comodidad vamos a multiplicar por 2 ambos miembros de la ecuación para evitar manejar fracciones

$$x^2+y^2-xy+x+y+7=0$$
$$2x^2+2y^2-2xy+2x+2y+14=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+14=0$$

Podemos clasificar la cónica usando sus invariantes

$$I_3=\det(A)=\det\begin{pmatrix}14 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=36>0$$

$$I_2=A_{00}=\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3>0$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}=2+2=4>0$$

Se trata de una cónica regular (no degenerada) del tipo de la elipse. Es una ELIPSE IMAGINARIA. Opción B)

Recordar el cuadro de clasificación de las cónicas

<table>
<tr><td colspan="3">Cónicas
REGULARES
$\det(A) \neq 0$</td><td>Cónicas
DEGENERADAS
$\det(A) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} \neq 0$
Cónicas con centro</td><td rowspan="2">$A_{00} > 0$
ELIPSE</td><td>Real
$\mathrm{sig}(A) \neq \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td><td rowspan="2">Un par de rectas imaginarias con un punto real común</td></tr>
<tr><td>Imaginaria
$\mathrm{sig}(A) = \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_{00} < 0$
HIPÉRBOLA</td><td>Un par de rectas reales que se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} = 0$</td><td colspan="2" rowspan="3">PARÁBOLA</td><td>$A_{11} + A_{22} > 0$
Par de rectas imaginarias sin intersección real</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} < 0$
Par de rectas paralelas</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} = 0$
Par de rectas coincidentes</td></tr>
</table>

Otra manera de abordar la clasificación de la cónica es buscar la ecuación reducida mediante una transformación métrica.

Mediante un giro se puede eliminar el término cruzado.

Diagonalizamos la parte cuadrática mediante un cambio de base ortonormal

Polinomio característico:

$$p(m) = \det(A - mI) = \det\begin{pmatrix} 2-m & -1 \\ -1 & 2-m \end{pmatrix} = m^2 - 4m + 3$$

Autovalores:

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1, \quad m = 3$$

Autoespacios:

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \; x - y = 0 \; = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \; x + y = 0 \; = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mediante el Giro

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

La ecuación resulta

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+14=0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+14=0$$

$$x'^2+3y'^2+\tfrac{4}{\sqrt{2}}x'+14=0$$

Ahora se puede eliminar el término lineal mediante una translación

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

En este caso, como no hay término lineal en y, está claro que $b = 0$.

Resulta esta ecuación

$$\begin{aligned} (x''+a)^2+3(y''+0)^2+\tfrac{4}{\sqrt{2}}(x''+a)+14&=0 \\ x''^2+2ax''+a^2+3y''^2+\tfrac{4}{\sqrt{2}}x''+\tfrac{4}{\sqrt{2}}a+14&=0 \\ x''^2+3y''^2+\left(2a+\tfrac{4}{\sqrt{2}}\right)x''+\left(a^2+\tfrac{4}{\sqrt{2}}a+14\right)&=0 \end{aligned}$$

Haciendo $a=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x''^2+3y''^2+12&=0 \\ x''^2+3y''^2&=-12 \end{aligned}$$

Es una ecuación que no tiene soluciones reales.

Veamos estas operaciones hechas usando MAXIMA

La ecuación reducida USANDO INVARIANTES es más fácil.
Sabiendo que la ecuación reducida de una cónica con centro es de la forma

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} k_0\cdot k_1\cdot k_2 &= 36 \\ k_1\cdot k_2 &= 3 \\ k_1+k_2 &= 4 \end{aligned}$$

$k_0 = 12,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3$

wxMaxima 13.04.2 [enero 2010 A ejercicio 6.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i5) `load(eigen);`

(%o5) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/matrix/eigen.mac

(%i6) `Aoo:matrix([2,-1],[-1,2]);`

(%o6) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i7) `uniteigenvectors(Aoo);`

(%o7) $[[[3,1],[1,1]],[[[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]],[[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]]]]$

(%i8) `G:matrix([1/sqrt(2),-1/sqrt(2)],[1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);`

(%o8) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(%i9) `XY:matrix([x],[y]);`

(%o9) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(%i10) `/*parte cuadrática de la cónica despues del giro*/`
`q: transpose(XY).transpose(G).Aoo.G.XY;`

(%o10) $x\left(\frac{2\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)+y\left(\frac{2\left(\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$

(%i11) `q:expand(%);`

(%o11) $3\,y^2+x^2$

(%i19) `/*Parte lineal de la cónica después del giro*/`

`l:expand(matrix([2,2]).G.XY);`

(%o19) $2^{3/2}\,x$

(%i22) `/*Ecuación de la cómica después del giro*/`
`ec:q+l+14;`

(%o22) $3\,y^2+x^2+2^{3/2}\,x+14$

(%i25) `ect:expand(subst([x=x+a],ec));`

(%o25) $3\,y^2+x^2+2\,a\,x+2^{3/2}\,x+a^2+2^{3/2}\,a+14$

(%i26) `solve([2*a+2^(3/2)=0],[a]);`

(%o26) $[a=-\sqrt{2}]$

(%i27) `subst([a=-sqrt(2)],ect);`

(%o27) $3\,y^2+x^2+12$