Clasificar una forma cuadratica

a) Hallar la matriz diagonal asociada al forma cuadrática $Q\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Q(x,y,z) = ax^2 + ay^2 + (a-1)z^2 + 2axy$$

Para los diferentes valores de a.

b) Clasificar la forma cuadrática según los valores de a.

a) Esta forma cuadrática escrita en forma matricial, $Q(X) = X^t AX$, es:

$$Q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matriz A siempre se puede diagonalizar mediante un cambio ortogonal porque es una matriz simétrica.

El polinomio característico de A es

$$p(m) = \det(A - mI) =$$

$$-m^3 + (3a-1)m^2 - 2a(a-1)m =$$

$$-m[m^2 + (1-3a)m + 2a(a-1)] =$$

$$= -m(m-a+1)(m-2a)$$

Comentario: la ecuación de segundo grado

$[m^2 + (1-3a)m + 2a(a-1)] = 0$

Se puede resolver también utilizando la fórmula de de ecuación d segundo fgrado

$$m = \frac{3a - 1 \pm \sqrt{(1-3a)^2 - 8a(a-1)}}{2} =$$

$$= \frac{3a - 1 \pm \sqrt{1 - 6a + 9a^2 - 8a^2 + 8a}}{2} =$$

$$= \frac{3a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1}}{2} =$$

$$= \frac{3a - 1 \pm (a + 1)}{2} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{3a - 1 + a + 1}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a \\ \dfrac{3a - 1 - a - 1}{2} = \dfrac{2a - 2}{2} = a - 1 \end{cases}$$

Luego los autovalores son:

$$m = a - 1$$
$$m = 2a$$
$$m = 0$$

Lo cual quiere decir que una forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando MAXIMA (repasamos algunos comandos relacionados con la diagonalización de matrices)

(%i2) `A:matrix([a,a,0],[a,a,0],[0,0,a-1]);`

(%o2) $$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `pol:charpoly(A,m);`

(%o5) $(-m+a-1)\,(a-m)^2-a^2\,(-m+a-1)$

(%i6) `factor(pol);`

(%o6) $-m\,(m-2\,a)\,(m-a+1)$

(%i8) `eigenvalues(A);`

(%o8) $[[a-1,2\,a,0],[1,1,1]]$

(%i12) `eigenvectors(A);`

(%o12) $[[[a-1,2\,a,0],[1,1,1]],[[[0,0,1]],[[1,1,0]],[[1,-1,0]]]]$

(%i14) `load(diag);`

(%o14) */usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac*

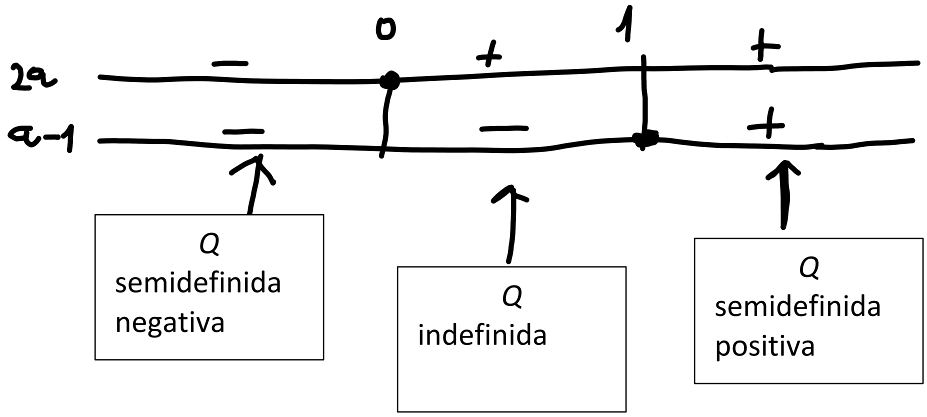
(%i15) `jordan(A);`

(%o15) $[[a-1,1],[2\,a,1],[0,1]]$

(%i16) `dispJordan(%);`

(%o16) $$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Para clasificar la forma cuadrática estudiamos el signo de los elementos de la diagonal, según los valores de *a*



Comentario:

La forma cuadrática una vez diagonalizada tiene la forma

$$Q(x, y, z) = (a - 1)x^2 + 2ay^2 + 0z^2$$

Cuando los dos sumandos son positivos la suma es positiva
Cuando los dos sumandos son negativos la suma es negativa

En definitiva, resulta

- Si $a \in (-\infty, 0]$, Q es semidefinida negativa
- Si $a \in (0,1)$, Q es indefinida
- Si $a \in [1, \infty)$, Q es semidefinida positiva