Álgebra (ETSI Industriales). TIPO A. Septiembre. 2017

- **Ejercicios 1 a 6**: *Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, incorrecta resta 0.33ptos, las dobles marcas o en blanco ni suman ni restan.*
- **Problema**: *Se corregirá sólo si la nota obtenida en los 6 ejercicios es igual o superior a 2ptos.*

Ejercicio 1 La factorización LU de una matriz A cuadrada de orden n: **A)** Siempre es única; **B)** NO se puede utilizar en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales del tipo $AX = B$; **C)** Permite calcular el determinante de A ya que coincide con el determinante de U; **D)** Ninguna de las anteriores es cierta.

Ejercicio 2 El conjunto de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix} : a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \right\}$ verifica: **A)** Es un espacio vectorial de dimensión 3; **B)** NO es un espacio vectorial; **C)** Es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices reales de orden 3×3; **D)** Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 3 Es cierto: **A)** Las matrices de cambio de base son singulares; **B)** La matriz asociada a una aplicación lineal depende de las bases fijadas; **C)** Todas las aplicaciones lineales son endomorfismos; **D)** Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 4 La aplicación lineal f definida por $f(x_1, x_2) = (7x_1 + 4x_2, -2x_1 + x_2)$ verifica que: **A)** Es ortogonal; **B)** Admite una representación matricial vía una matriz diagonal; **C)** Cualquier matriz asociada suya tiene rango 3; **D)** Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 5 La proyección del vector $(1, 0, -5)$ sobre el espacio $\langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ es: **A)** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -5)$; **B)** $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$; **C)** $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -2)$; **D)** Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 6 La cónica de ecuación $x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2 - 2x_2 + x_1 + 1 = 0$ es: **A)** Una parábola; Una Elipse; **C)** Una recta doble; **D)** Ninguna de las anteriores.

Problema

a) (2 puntos) Estudie si el conjunto $V = \{(x_1, x_2) | x_1 \in \mathbb{R}^+, x_2 \in \mathbb{R}\}$ con la operación $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2 + y_2)$ verifica la propiedad asociativa, elemento neutro, elemento simétrico y propiedad conmutativa.

b) (2 puntos) Estudie si la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= 5x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

es diagonalizable (1 punto). Escriba las ecuaciones cartesianas del subespacio núcleo (0.5 puntos) y halle la dimensión del subespacio imagen (0.5 puntos).

SOLUCIONES. Álgebra (ETSI Industriales). TIPO A. Septiembre. 2017

Solución 1: La factorización LU de una matriz existe si se puede triangularizar A mediante operaciones elementales de tipo reemplazo de filas, $F_i \leftrightarrow F_i + \lambda F_j$ (para considerar permutaciones se utiliza la factorización permutada). Cuando existe y A es regular, $A = LU$ es única. Por tanto, A) es falsa.
Además, si $A = LU$ entonces $\det(A) = \det(L).\det(U) = 1.\det(U)$ luego **C) es cierta.** B) es falsa porque, como se indica en la bibliografía, se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Solución 2: La **opción B) es cierta.** No contiene al elemento neutro (matriz nula de orden 3×3) y por ello no es un espacio vectorial.

Solución 3: La **opción B) es cierta.** Véase la teoría y los ejercicios de autoevaluación del capítulo 3.

Solución 4: La **opción B) es cierta.** Los valores propios son 5 y 3, simples. No es ortogonal como se puede comprobar. Además, su rango no puede ser superior a 2.

Solución 5: La **opción A) es cierta.** Según la fórmula de la proyección pedida es:

$$\frac{(1,0,-5)(1,1,0)}{2}(1,1,0) + \frac{(1,0,-5)(0,0,1)}{1}(0,0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -5).$$

Solución 6: La **opción A) es cierta.** Véase el ejemplo 6.34.

Solución Problema

a) Véase la solución en el Ejercicio 2.3 del libro *Ejercicios resueltos de Álgebra para Ingenieros.*

b) Se trata de justificar y explicar que:

- no es diagonalizable (Â¡No es un endomordismo!). La matriz asociada a f en las bases canónicas es
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$
- Las ecuaciones cartesianas del núcleo son $\left\{ \begin{array}{rrl} x_1 & +x_2 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & = 0 \\ 5x_1 & +4x_2 & = 0 \end{array} \right.$
- La dimensión del subespacio imagen es 2.