Álgebra (ETSI Industriales). TIPO A. Feberero [2]. 2017

- **Ejercicios 1 a 6**: *Deben ser contestados en hoja de test. Cada respuesta correcta suma 1pto, incorrecta resta 0.33ptos, las dobles marcas o en blanco ni suman ni restan.*
- **Problema**: *Se corregirá sólo si la nota obtenida en los 6 ejercicios es igual o superior a 2ptos.*

Ejercicio 1 Sean las matrices cuadradas regulares A, B, C. La expresión simplificada de $[A(BC)^{-1}]^{-1}[A(A^tB^t)^t(BA)^{-1}]$ es: **A)** AB; **B)** ABC; **C)** BC; **D)** Ninguna de ellas.

Ejercicio 2 Los vectores $(1,1,0,a),(3,-1,b,-1),(-3,5,a,-4)$ son un sistema ligado si: **A)** $a=-2$ y $b=1$; **B)** $a=-2$ o $b=1$; **C)** Siempre; **D)** Ninguna de ellas.

Ejercicio 3 Si $U=\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3\}$ y $U'=\{\overline{u'}_1,\overline{u'}_2,\overline{u'}_3\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$, cuyos vectores están relacionados por $\overline{u'}_1=\overline{u}_1+\overline{u}_3$; $\overline{u'}_2=\overline{u}_1-\overline{u}_2$ y $\overline{u'}_3=\overline{u}_2$, es cierto que el determinante de la matriz asociada al cambio de la base U a la base U' es: **A)** 1; **B)** -1; **C)** 0; **D)** Otro diferente.

Ejercicio 4 Sabiendo que $A=(a_{ij})$ es la matriz de un endomorfismo simétrico cuyas dos primeras columnas son $(4,2,2),(2,1,1)$ y que $(2,1,-2)$ es un vector propio, entonces el elemento a_{33} es: **A)** 3; **B)** $\frac{11}{2}$; **C)** -1; **D)** Ninguno de los anteriores.

Ejercicio 5 En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon x-y=0,\ z-t=0\}$. Entonces $U^{\perp}$ es: **A)** $\langle(1,-1,0,0),(-1,1,1,-1)\rangle$; **B)** $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon x=y=z=t\}$; **C)** $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\colon x-y=0,\ z+t=0\}$; **D)** Ninguno de los anteriores.

Ejercicio 6 NO es una forma cuadrática, la aplicación: **A)** $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_1x_2$; **B)** $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_1x_2$; **C)** $Q(x_1,x_2,x_3)=x_2^2-x_1$; **D)** Ninguna de las anteriores.

Problema Se pide:

a) Calcular, por el método de Gauss, el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. (1 pto.)

b) Explicar en qué consiste el problema de los mínimos cuadrados y presentar cómo se puede obtener una solución por mínimos cuadrados (1 pto.).

c) Hallar las ecuaciones del subespacio $\mathrm{Im}(f)$ (1 pto.) y del subespacio $\mathrm{Nuc}(f)$ (1 pto.) del endomorfismo f de $\wp_2(x)$ (polinomios reales de grado menor o igual a 2) definido por la derivada, es decir, $f(a+bx+cx^2)=b+2cx$ para $a+bx+cx^2\in\wp_2(x)$.

SOLUCIONES. Álgebra (ETSI Industriales). TIPO A. Feberero [2]. 2017

Solución 1: La opción cierta es C.

$[A(BC)^{-1}]^{-1}[A(A^tB^t)^t(BA)^{-1}]$ se simplifica como sigue:

$$[(BC)A^{-1}[A(BA)(A^{-1}B^{-1})] = [(BC)A^{-1}[A] = BC$$

Solución 2: La opción cierta es A. El rango de la matriz que forman debe ser 2. La opción A) es cierta porque:

```
(%i1)  rank(matrix([1,1,0,-2],[3,-1,1,-1],[-3,5,-2,-4]));
```

(%o1) 2

La opción B) es falsa porque para $a = -2$ y $b = 0$ el rango es 3:

```
(%i2)  rank(matrix([1,1,0,-2],[3,-1,0,-1],[-3,5,-2,-4]));
```

(%o2) 3

Luego C) es falsa y D) también.

Solución 3: La opción cierta es A.

La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución 4: La solución correcta es B.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 3, m = \frac{11}{2}$$

Solución 5: La opción cierta es A.

Teniendo en cuenta que $U = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle$ y tiene dimensión 2, entonces $U^{\perp}$ también tiene dimensión 2. Comprobando las opciones se deduce.

Solución 6: La opción cierta es C . Ejercicio 6.12 del libro de ejercicios.

$\boxed{\textbf{Solución Problema}}$

a) Se aplica el método de Gauss a la matriz para calcular el rango que vale 2 (se obtienen dos filas de ceros al escalonar la matriz dada).

b) Véase la teoría.

c) El subespacio imagen tiene dimensión 2 (sus ecuaciones son $c = 0$) y el núcleo tiene dimensión 1 (sus ecuaciones son $b = 0$, $c = 0$).
$\mathrm{Im}(f) = \{a + bx + cx^2 : c = 0\}$ y $\mathrm{Nuc}(f) = \{a + bx + cx^2 : b = c = 0\}$.