Febrero 2016 B Ejercicio 6

Ejercicio 6 La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ verifica: **A)** Tiene signatura 2; **B)** Una matriz diagonal congruente con la matriz asociada a Q es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **C)** Q no se puede reducir a suma de cuadrados; **D)** Ninguna de las anteriores.

La expresión, en notación matricial, de la forma cuadrática *Q* es

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2$$

Comentario: Recordamos a lo que se llaman *matrices congruentes*. Página 249 del Libro de Teoría.

> Dos matrices cuadradas *A* y *A´* son **congruentes** si: existe alguna matriz regular *P* tal que $A' = P^tAP$.

Comentario: Las matrices de la misma forma cuadrática, pero en distintas bases, son congruentes; ya que, si *A* es la matriz de una forma cuadrática y se hace un cambio de base, de matriz de paso *P*, la forma cuadrática, respecto de la nueva base es $A' = P^tAP$.

Comentario: Una forma cuadrática siempre se pude diagonalizar. Es decir, siempre existe una base respecto de la cual podemos escribirla como suma de cuadrados, eliminando los términos cruzados. Hay muchas formas de hacerlo. Por ejemplo, usando el método de completar cuadrados de Gauss. Pero, si queremos hacerlo mediante una transformación ortonormal, que conserva ángulos y distancias, podemos utilizar el método de diagonalización que vimos para los endomorfismos. Este método se puede aplicar y siempre funciona bien ya que la matriz de una forma cuadrática es simétrica. Todas las matrices simétricas son diagonalizables mediante una matriz de paso ortonormal *P*, tal que $P^t = P^{-1}$.

Comentario: Según los comentarios anteriores, ya de entrada, por razones teóricas, podríamos decir que la opción C) es FALSA.

Vamos a buscar la expresión diagonal de la matriz simétrica A mediante un cambio de base ortonormal tal que $P^t = P^{-1}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 0 = \lambda(\lambda - 2)$$

- Autovalores

$$\lambda = 0 \qquad\qquad \lambda = 2$$

- Autoespacios

$$E(0) = Nuc(A - \lambda I) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x_1 + x_2 = 0\} =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E(2) = Nuc(A - \lambda I) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{-x_1 + x_2 = 0\} =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

De este modo, la forma cuadrática se puede reducir a una matriz diagonal

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mediante un cambio ortogonal de matriz de paso ortonormal $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Comentario: El cambio es directo, porque el determinante de *P* es +1.

De manera que, respecto de la nueva base, la nueva matriz de la forma cuadrática es.

$$A' = P^t A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Este cálculo nos confirma que la opción C) es FALSA.

Comentario: Todas las formas cuadráticas tienen una expresión diagonal, pero esta no es única. Todas las matrices que representan la misma forma cuadrática respecto a diferentes bases se dice que son *matrices congruentes*.

Comentario: En este caso, además, se ve desde el primer momento mediante un golpe de vista, que la forma *Q* se puede expresar como suma de cuadrados

$$\boldsymbol{Q(x_1, x_2)} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 = \boldsymbol{(x_1 + x_2)^2}$$

Comentario: La definición de *signatura* de una forma cuadrática. Ver página 263 del Libro de Teoría

> La **signatura** de una forma cuadrática *Q* es el número de términos positivos no nulos ($k_i > 0$) de una forma canónica asociada.

Comentario: La signatura es el número de autovalores positivos. El teorema de inercia de Sylvester garantiza, que aunque se cambie forma diagonal, la signatura no varía. Es decir, la signatura es una característica intrínsecade la forma cuadrática.

En nuestro caso la signatura de la forma Q es

$$sig(Q) = 1$$

Por tanto, la opción A) es FALSA.

Para contestar a la opción B) vamos a estudiar si existe una matriz $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tal que

$$A' = P^t AP$$

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esta relación nos conduce a un sistema de cuatro ecuaciones cuadráticas con cuatro incógnitas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Este planteamiento resulta demasiado complicado. Así que vamos a buscar una condición necesaria que deben cumplir las matrices congruentes.

Si tomamos determinantes en la igualdad $A' = P^t AP$, tenemos que si A y A' son congruentes deben cumplir que

$$\det(A') = \det(P^t)\det(A)\det(P)$$

$$\det(A') = \det(A)[\det(P)]^2$$

Para nuestro caso

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} [\det(P)]^2$$
$$-1 = 0[\det(P)]^2$$

Pero esta relación no se puede cumplir para ninguna matriz P regular

Por consiguiente, B) es FALSA.

En definitiva, **La opción correcta es D)**

```
(%i8)   A:matrix([1,1],[1,1]);
        X:matrix([x],[y]);
        XT:transpose(X);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(%o7) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(%o8) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

```
(%i9)   Q:XT.A.X;
```

(%o9) $y\,(y+x)+x\,(y+x)$

```
(%i10)  expand(%);
```

(%o10) $y^2+2\,x\,y+x^2$

```
(%i11)  factor(%);
```

(%o11) $(y+x)^2$

```
(%i13)  charpoly(A,m);
```

(%o13) $(1-m)^2-1$

```
(%i14)  factor(%);
```

(%o14) $(m-2)\,m$

```
(%i15)  eigenvalues(A);
(%o15)  [[0,2],[1,1]]
```

```
(%i16)  eigenvectors(A);
```

(%o16) $\left[[[0,2],[1,1]],\left[[[1,-1]],[[1,1]]\right]\right]$

```
(%i17) load(diag);
(%o17) /usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac

(%i18) j:jordan(A);
(%o18) [[0,1],[2,1]]

(%i19) dispJordan(j);
```

(%o19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

```
(%i20) ModeMatrix(A,j);
```

(%o20) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$