1

COMPLEMENTOS de MATEMÁTICAS

2024

Junio A
Junio B
Septiembre

allave@madrid.uned.es

COMPLEMENTOS
de MATEMÁTICAS

Junio 2024 A

allave@madrid.uned.es

2

3

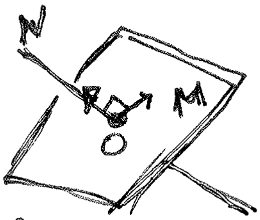
1) En el espacio $\mathbb{R}^3$ sean

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } 2x - y + z = 0\}$$

y N la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(2, -1, 1)$. ¿Son espacios ortogonales?

Recordatorio

Se dice que $M \perp N$ sii $\forall \vec{u} \in M \; \forall \vec{v} \in N$ se verifica que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Comentario

M es un plano que pasa por el origen y su vector ortogonal es $(2, -1, 1)$

Como se ve este vector coincide con el vector director de la recta N

Los vectores de N son de la forma $\lambda(2, -1, 1)$

Si $(x, y, z) \in M \iff 2x - y + z = 0 \iff$

$\iff (x, y, z) \cdot (2, -1, 1) = 0 \iff (x, y, z) \cdot \lambda(2, -1, 1) = 0$

$\iff M \perp N.$

Sí son ortogonales

Comentario: Se supone el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$

Comentario:

$M \perp N \iff$ {los vectores de una base de M} son ortogonales a {los vectores de una base de N}

2 Se pide determinar, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^4}$$

Recordatorio (definición de límite ε-δ)

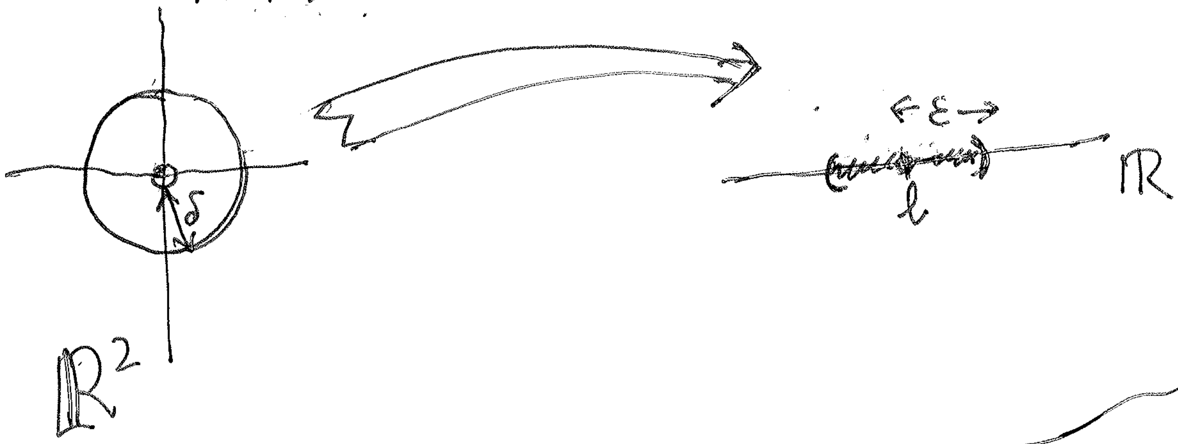
Dado $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

Se dice que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ sii

Dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que

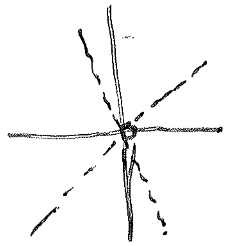
Si $0 < |(x,y)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$



Como primera aproximación necesitamos intuir cuál va a ser, de existir, el límite.

Para lo cual estudiamos el límite por diversos caminos en $\mathbb{R}^2$

Si nos acercamos al punto $(0,0)$ a través del eje x $(y=0)$



$$f(x,0)=\frac{0}{x^2+0}\to 0$$

Es una función que es constantemente igual a 0

Si nos acercamos al punto $(0,0)$ a través del eje y $(x=0)$

$$f(0,y)=\frac{0}{0+y^4}\to 0$$

Es una función que es constantemente igual a 0

Si nos acercamos por las rectas $y=mx$

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^4x^4}=\frac{m}{1+m^4x^4}\to m$$

cuando x se hace pequeño

Es una cantidad que varía según el valor de m. Es decir, el límite depende del camino $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No Existe el límite}}$

Recordatorio

EXISTE LÍMITE $\Rightarrow$ EXISTEN LÍMITES POR TODOS LOS CAMINOS Y SON IGUALES

$\not\Leftarrow$

3) Sea C la curva definida

$$\vec{x}(t) = (\cos t,\ t^3 - 3t^2,\ t^2 + e^t)$$

$\vec{x}: [0,1] \to \mathbb{R}^3$

Se pide estudiar si es una curva regular

Recordatorio

se dice que la curva $\vec{x}(t)$ es regular en el punto t sii $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$

$$x'(t) = (-\sin(t),\ 3t^2 - 6t,\ 2t + e^t)$$

la curva $\vec{x}$ es singular para los valores del parámetro $t \in [0,1]$ que verifican simultaneamente

$$\begin{cases} -\sin(t) = 0 \\ 3t^2 - 6t = 0 \\ 2t + e^t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \quad t = \pi \ \ldots \\ 3t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = 2 \\ -2t = e^t \end{cases}$$

Solo pueden anular las dos primeras ecuaciones $t \in [0,1]$ el valor $t = 0$

¿Anula también la tercera ecuación?

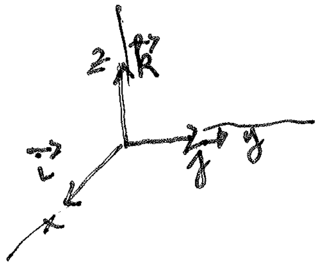
No. $[-2 \cdot 0 \neq e^0]$. Por consiguiente,

$\boxed{\vec{x} \text{ es una curva regular } t \in [0,1]}$

4 Sea C la curva definida por

$$\vec{x}(t) = (\cos(t),\ t^3 - 3t^2,\ t^2 + e^t) \text{ con } t \in [0,1]$$

Se pide estudiar si el vector tangente a C en un punto $\vec{x}(t_0)$ no singular puede ser perpendicular al plano xy



un vector tangente es

$$\vec{x}'(t) = (-\sin(t),\ 3t^2 - 6t,\ 2t + e^t)$$

Si $\vec{x}'(t)$ es perpendicular al plano xy quiere decir que es proporcional al vector $\vec{k} = (0,0,1)$ o también que es ortogonal a $\vec{i} = (1,0,0)$ y a $\vec{j} = (0,1,0)$

Veamos

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}'(t) \cdot (1,0,0) = 0 \Rightarrow \sin(t) = 0 \\ \vec{x}'(t) \cdot (0,1,0) = 0 \Rightarrow 3t(t-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0$$

Por consiguiente en el punto para $t=0$

$$\vec{x}(0) = (1, 0, 1)$$

$$\vec{x}'(0) = (0, 0, 1).$$

y $\vec{x}'(0)$ es perpendicular al plano xy

5. Sea la curva definida por las ecuaciones

$$\vec{x}(t) = (t^3 + t - 1,\ t^2 + 1)$$

Se pide

a) Escribir la matriz jacobiana de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t^3 + t - 1, t^2 + 1)$
¿Es la matriz nula en algún punto? Este resultado que nos permite afirmar sobre la curva C ?

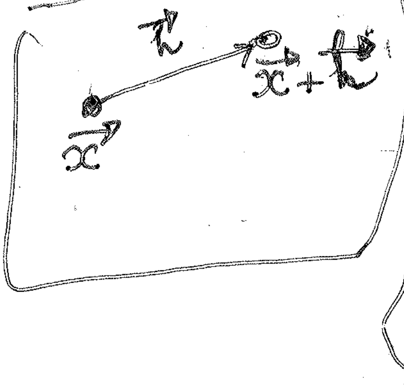
b) Determinar la función curvatura y el radio de curvatura en $\vec{x}(t)$.
radio de curvatura en $\vec{x}(0)$

c) Determinar el centro de curvatura y dar la ecuación de la circunferencia osculadora en $\vec{x}(0)$.

a) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$. El incremento de f en un punto $\vec{x}$ según el incremento $\vec{h}$ es

$$\Delta f(\vec{h}) = f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})$$

Si esta función Δf se puede aproximar por una función lineal [la diferencial, $D(\vec{h})$] tiene por matriz la MATRIZ JACOBIANA



$$J = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m & & D_n f_m \end{pmatrix}$$

($D_i f_j$ significa la derivada parcial respecto x_i de f_j)

En nuestro caso $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) = t^3+t-1 \\ f_2(t) = t^2+1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual la matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2+1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

De modo que

$$\underset{\text{Incremento}}{\Delta f(h)} = f(t+h) - f(t) \approx \underset{\text{Diferencial}}{D(h)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3t^2+1 \\ 2t \end{pmatrix}}_{J} h$$

Jacobiano

Veamos si la matriz Jacobiana es nula para algún valor de t

$$\begin{cases} 3t^2+1=0 \\ 2t=0 \quad \to t=0 \end{cases}$$

La segunda componente se anula solo cuando $t=0$, pero este valor de t no anula la primera componente. Por tanto, no se anula nunca sobre la curva C.

Es decir, todos los puntos de la curva son regulares (tienen vector tangente)

(b) La función curvatura mide lo que varía la dirección del vector $\vec{t}$ (vector unitario en la dirección de $\vec{x}'$)

Mirando el formulario

$$K(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|x'(t)\|^3}$$ (se refiere a curvas en el espacio)

Si la particularizamos para una curva plana (como es nuestro caso) podemos suponer que $z(t)=0$.

También podemos aplicar la fórmula correspondiente para curvas planas

Si $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ es una curva plana

$$\begin{cases} K(t) = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}} \\ \\ \text{si } \vec{t}=(a,b), \ \vec{n}=(-b,a) \end{cases}$$

Lo haremos de dos formas:

1ª Formaula

Si $\vec{x}(t) = (t^3+t-1,\ t^2+1,\ 0)$

$\vec{x}'(t) = (3t^2+1,\ 2t,\ 0)$

$\vec{x}''(t) = (6t,\ 2,\ 0)$

$$\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2+1 & 2t & 0 \\ 6t & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0,\ 0,\ -6t^2+2)$$

$$\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\| = \sqrt{0^2+0^2+(-6t^2+2)^2} = -6t^2+2$$

$$\|\vec{x}'(t)\|^3 = \left(\sqrt{(3t^2+1)^2+(2t)^2}\right)^3 = \left(\sqrt{9t^4+6t^2+1+4t^2}\right)^3 =$$

$$= \sqrt{9t^4+10t^2+1}$$

por tanto, $\quad K(t) = \dfrac{\|x'(t) \times x''(t)\|}{\|x'(t)\|^3}$

$$K(t) = \frac{-6t^2+2}{(9t^4+10t^2+1)^{3/2}}.$$

El radio de curvatura es la inversa de la curvatura

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)} = \frac{(9t^4+10t^2+1)^{3/2}}{-6t^2+2}$$

2ª Fórmula

$$K(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

En nuestro caso $\vec{x}(t) = (t^3 + t - 1,\ t^2 + 1)$

$x' = 3t^2 + 1 \quad ; \quad y' = 2t$

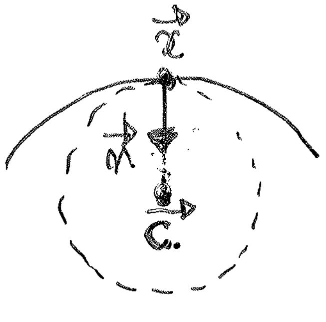
$x'' = 6t \quad ; \quad y'' = 2$

$$K(t) = \frac{(3t^2+1)\cdot 2 - 6t\,(2t)}{\left[(3t^2+1)^2 + (2t)^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{6t^2 + 2 - 12t^2}{(9t^4 + 6t^2 + 1 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{-6t^2 + 2}{(9t^4 + 10t^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)} = \frac{(9t^4 + 10t^2 + 1)^{3/2}}{-6t^2 + 2}$$

(c) Para hallar el centro de curvatura



$$\vec{c} = \vec{x} + \rho\,\vec{n}$$

En nuestro caso

$\vec{x}(0) = (-1, 1)$

$\rho(0) = \frac{1}{2}$

$\vec{t} = \frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|} \ ; \quad \vec{t}(0) = \frac{(1,0)}{1} = (1, 0) \ ; \ \vec{n}(0) = (0, 1)$

El centro de curvatura para $t=0$

$$\vec{c}(0) = \vec{x}(0) + \rho(0)\,\vec{n}(0)$$

$$\vec{c}(0) = (-1,1) + \frac{1}{2}(0,1) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

La circunferencia osculadora es la circunferencia que está en el plano osculador (plano que contiene a $\vec{t}$ y $\vec{n}$)

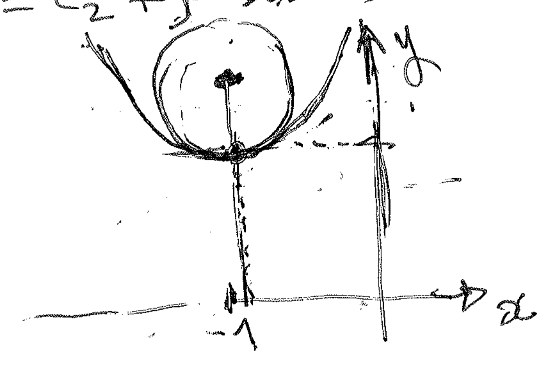
La circunferencia que tiene el centro en $\vec{c}(0) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $\rho(0) = \frac{1}{2}$

es en implícitas

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

En paramétricas

$$\begin{cases} x = c_1 + \rho\cos(t) \\ y = c_2 + \rho\sin(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -1 + \frac{1}{2}\cos(t) \\ y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin(t) \end{cases}$$

comprobamos que para $t = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{x}(0) = \left(-1+0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-1,1)$

El punto $\vec{x}(0) = (-1,1)$ verifica la ec. implícita.

$$(-1+1)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

6

Sea la superficie dada por las ecuaciones paramétricas

$$\vec{x}(u,v) = (u,\ v^3,\ u^3 + v^3 - 3u^2)$$

Se pide:

(a) Determinar los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de S en $\vec{x}(0,1)$

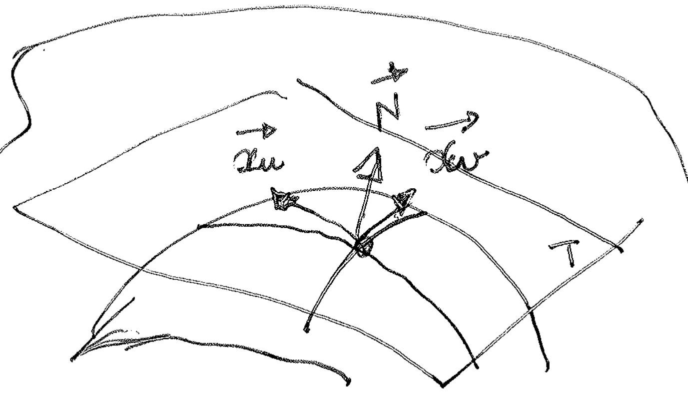
(b) Clasificar el punto $\vec{x}(0,1)$ y determinar las líneas de curvatura que pasan por él

(c) Determinar la longitud de la curva parámetro $\vec{x}(u,1)$ entre $u=0$ y $u=2$.

(a) Primera forma fundamental

$$I(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$= E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$



$E = \vec{x_u}\cdot\vec{x_u}$; $F = \vec{x_u}\cdot\vec{x_v}$; $G = \vec{x_v}\cdot\vec{x_v}$

La primera forma fundamental define un producto escalar en el plano tangente, que es la métrica local de la superficie

$\{\vec{x_u}, \vec{x_v}\}$ es una base del plano tangente T

$du\,\vec{x}_u + dv\,\vec{x}_v$ es un punto de el plano tangente

En nuestro caso los coeficientes de $I(du,dv)$

$$\begin{cases} \vec{x}(u,v) = (u, v^3, u^3+v^3-3u^2) \; ; \; x(0,1) = (0,1,1) \\ \vec{x}_u(u,v) = (1, 0, 3u^2-6u) \; ; \; \vec{x}_u(0,1) = (1,0,0) \\ \vec{x}_v(u,v) = (0, 3v^2, 3v^2) \; ; \; \vec{x}_v(0,1) = (0,3,3) \end{cases}$$

En el punto $\vec{x}(0,1) = (0;1,1)$ los coeficientes de I

$$E = \vec{x}_u(0,1) \cdot \vec{x}_u(0,1) = (1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1$$

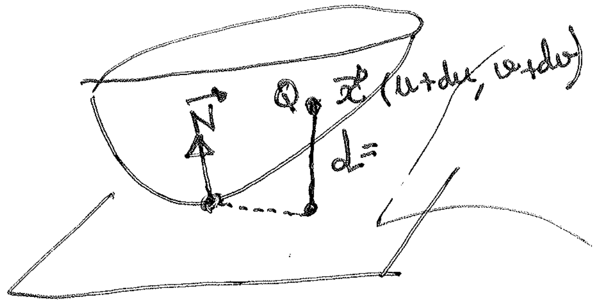
$$F = \vec{x}_u(0,1) \cdot \vec{x}_v(0,1) = (1,0,0)\cdot(0,3,3) = 0$$

$$G = \vec{x}_v(0,1) \cdot \vec{x}_v(0,1) = (0,3,3)\cdot(0,3,3) = 18$$

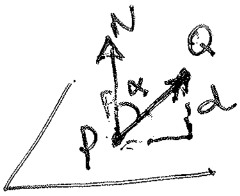
Segunda forma fundamental

La segunda forma fundamental sirve para medir

[$\vec{N}$ = vector normal unitario a la superficie]



La distancia de un punto a un plano



$$d = |\vec{PQ}| \sin(90-\alpha) = |\vec{PQ}| \cos\alpha = |\vec{PQ}| \underbrace{|\vec{N}|}_{1} \cos\alpha = \vec{PQ} \cdot \vec{N}$$

Si tomamos $Q = \vec{x}(u+du, v+dv) \approx$

$$\approx \underbrace{\vec{x}(u,v)}_{P} + d\vec{x}(du,dv) + \frac{1}{2} d^2\vec{x}(du,dv) + \dots$$

desarrollo de Taylor

En donde

$$\begin{cases} d\vec{x}(du,dv) = \vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv & \text{(punto del plano tangente)} \\ d^2\vec{x}(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} \vec{x}_{uu} & \vec{x}_{uv} \\ \vec{x}_{uv} & \vec{x}_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \end{cases}$$

$$= \vec{x}_{uu}(du)^2 + 2\,\vec{x}_{uv}\,du\,dv + \vec{x}_{vv}(dv)^2$$

$$d = \vec{PQ}\cdot\vec{N} \approx (\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv)\cdot\vec{N} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(\vec{x}_{uu}\cdot\vec{N})(du)^2 + 2(\vec{x}_{uv}\cdot\vec{N})\,du\,dv + \vec{x}_{vv}(dv)^2 + \dots\right.$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{II}(du,dv)$$

Siendo $\mathrm{II}(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

En donde $\begin{cases} e = \vec{x}_{uu}\cdot\vec{N} \\ f = \vec{x}_{uv}\cdot\vec{N} \\ g = \vec{x}_{vv}\cdot\vec{N} \end{cases}$ COEFICIENTES II segunda forma fundamental

teniendo en cuenta que

$\vec{x}_u = (1,0,3u^2-6u)$; $\vec{x}_u(0,1) = (1,0,0)$

$\vec{x}_{uu} = (0,0,6u-6)$; $\vec{x}_{uu}(0,1) = (0,0,-6)$

$\vec{x}_{uv} = (0,0,0)$; $\vec{x}_{uv}(0,1) = (0,0,0)$

$\vec{x}_v = (0,3v^2,3v^2)$; $\vec{x}_v(0,1) = (0,3,3)$

$\vec{x}_{vv} = (0,6v,6v)$; $\vec{x}_{vv}(0,1) = (0,6,6)$

$$\vec{N}(0,1) = \frac{\vec{x}_u(0,1)\times\vec{x}_v(0,1)}{\|\vec{x}_u\times\vec{x}_v\|} = \frac{1}{\|\circ\|}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\|(0,-3,3)\|}(0,-3,3) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}(0,-3,3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

En el punto $\vec{x}(0,1) = (0,1,1)$

los coeficientes de II son

$$e = \vec{x}_{uu}(0,1) \cdot \vec{N}(0,1) = (0,0,-6) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}6 = -3\sqrt{2}$$

$$f = \vec{x}_{uv}(0,1) \cdot \vec{N}(0,1) = (0,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = 0$$

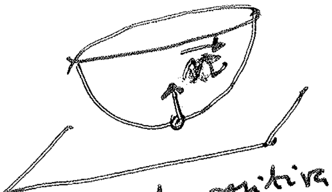
$$g = \vec{x}_{vv}(0,1) \cdot \vec{N}(0,1) = (0,6,6) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = 0$$

Notación $\boxed{L = e \, ; \, N = f \, ; \, M = g}$

(b) Recordatorio

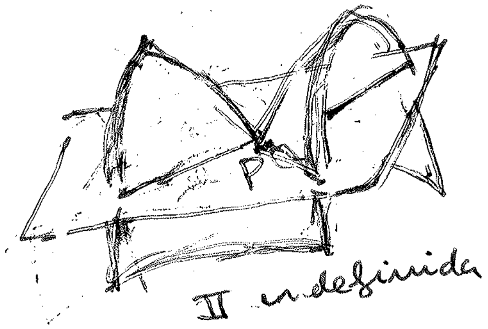
Clasificación de puntos.

- Caso elíptico $eg - f^2 > 0$
  (los puntos de la superficie están del mismo lado del plano tangente)



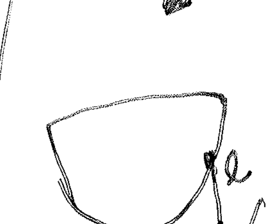
II Definida positiva

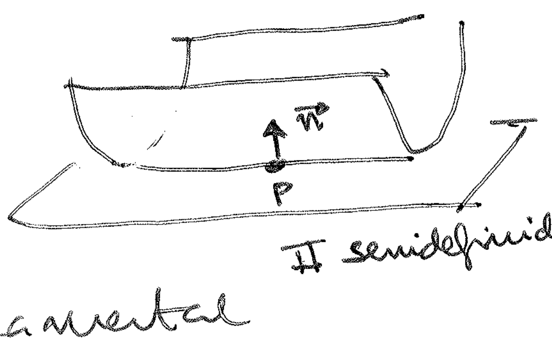
- Caso hiperbólico $eg - f^2 < 0$
  la superficie atraviesa el plano tangente en las direcciones asintóticas



II indefinida

- Caso parabólico $eg - f^2 = 0$
  $e \neq 0$





II semidefinida

La segunda forma fundamental

distancia al plano tangente $= l = \frac{1}{2} II_p(du, dv) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2\right)}_{\text{forma cuadrática}}$

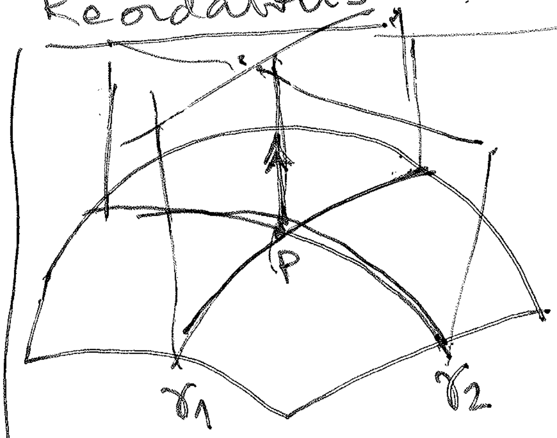
En nuestro caso

$$eg - f^2 = (-3\sqrt{2}) \cdot 0 - 0^2 = 0$$

con $e \neq 0$.

Se trata de un punto <u>parabólico</u>

<u>Recordatorio:</u>



Si consideramos las secciones normales a una superficie en un punto P

cada plano corta a la superficie en una curva γ

se llaman curvaturas normales a las curvaturas de ~~las~~ las curvas γ.

El máximo y el mínimo de las curvaturas normales, ~~k_1~~ k_1 y k_2, se obtienen para las curvas normales γ_1 y γ_2

~~las~~ las tangentes a γ_1 y γ_2 en P se llaman Direcciones principales.

Las <u>líneas de curvatura</u> son γ_1 y γ_2

Las líneas de curvatura cumplen la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

En nuestro caso

$$(Ef-Fe)(du)^2+(Eg-Ge)\,du\,dv+(gF-Gf)(dv)^2=0$$

$$(1\cdot 0-0\cdot(-3\sqrt{2}))(du)^2+(1\cdot 0-18\cdot(-3\sqrt{2}))\,du\,dv-(0\cdot 0-18\cdot 0)(dv)^2=0$$

$$du\,dv=0 \Rightarrow \begin{cases} du=0 \\ \text{o bien} \\ dv=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=cte \\ v=cte \end{cases}$$

Como estamos en el punto $\vec{x}(0,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases}$$

con lo cual las líneas de curvatura son

$\vec{x}(0,v)=(0,v^3,v^3)$

$\vec{x}(u,1)=(u,1,u^3+1-3u^2)$

c) **Recordatorio:**

La longitud de una curva es

$$L_{ab}=\int_a^b \|\vec{x}'(t)\|\,dt$$

La curva $\vec{x}(u,1)=(u,1,u^3+1-3u^2)$

como parámetro $u=t$

$\vec{x}'(t)=(1,0,3t^2-6t)$

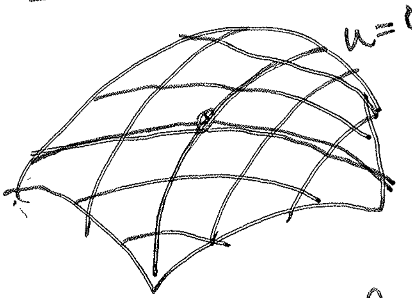
$$\|\vec{x}'(t)\|=\sqrt{1^2+(3t^2-6t)^2}=\sqrt{1+[3t(t-2)]^2}=$$

$$=\sqrt{1+9t^2(t^2-4t+4)}=\sqrt{9t^4-36t^3+36t^2+1}$$

$L_{0,2} = \int_0^2 \sqrt{9t^4 - 36t^3 + 36t^2 + 1}\, dt = 4{,}59202$ (Wolfram Alpha) 19

(ver pag 272 del libro de texto)

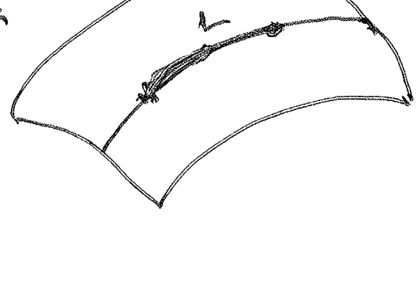
- Se llaman <u>curvas parámetro</u> o curvas coordenadas, a las que $u = cte$ o bien $v = cte$



(Las curvas parámetro forman un sistema de coordenadas curvilíneas)

- Longitud de de una curva a lo largo de la superficie

La longitud de una curva



$L = \int_a^b \|x'(t)\| dt =$

$= \int_a^b \sqrt{x'(t) \cdot x'(t)}\, dt$

Como $\vec{x}' \cdot \vec{x}' = (u'\vec{x}_u + v'\vec{x}_v) \cdot (u'\vec{x}_u + v'\vec{x}_v) =$

$= (u')^2 \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u + 2u'v' \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v + (v')^2 \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v =$

$= E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2$

tenemos

$L = \int_a^b E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2\, dt$

En la curva parámetro $\vec{x}(u,1)$ haciendo $u=t$

En nuestro caso $u'(t)=1$ y $v'(t)=0$

con lo cual

$$L=\int_a^b \left(E(u')^2+2F(u'v')+G(v')^2\right)^{1/2} dt$$

queda $\int_0^2 \sqrt{E(u')^2+2F0+G0}\, dt$

Como

$$E=\vec{x}_u\cdot\vec{x}_u=(1,0,3u^2-6u)\cdot(1,0,3u^2-6u)$$
$$=1+(3u^2-6u)^2$$

$$=\int_0^2 \sqrt{1+(3u^2-6u)^2}\, dt = 4{,}59202$$

(como de la otra forma)

<u>Comentario</u> Estas dos formas indican dos puntos de vista de medir la longitud de una curva de una superficie

1) Como una curva en el espacio $\sum \Delta s$ sumando los infinitesimos de longitud de arco

2) como cachitos de curvas sobre la superficie usando las métricas locales de los planos tangentes.

COMPLEMENTOS de MATEMÁTICAS

Examen Junio 2024 B

allave@madrid.uned.es

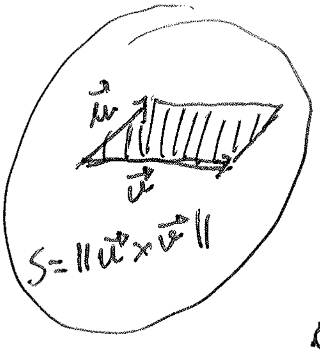
PREGUNTAS CORTAS

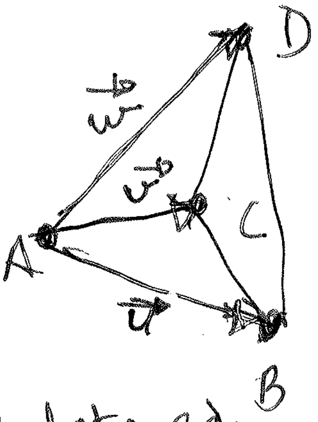
1 (1 punto) Dado el tetraedro de vértices

$A=(0,0,0)$, $B=(1,1,1)$, $C=(2,0,-1)$

$D=(-1,0,1)$

Se pide determinar el volumen





El volumen del tetraedro es

$$Vol=\frac{1}{6}[\vec u,\vec v,\vec w]=\frac{1}{6}\left|\det[\vec u,\vec v,\vec w]\right|$$

$$\vec u=\vec{AB}=(1,1,1)-(0,0,0)=(1,1,1)$$
$$\vec v=\vec{AC}=(2,0,-1)-(0,0,0)=(2,0,-1)$$
$$\vec w=\vec{AD}=(-1,0,1)-(0,0,0)=(-1,0,1)$$

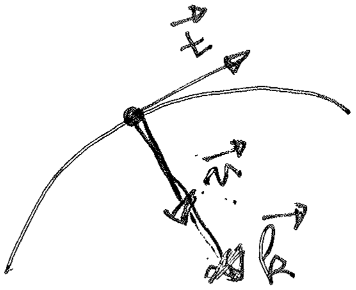
$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\,|-1|=\frac{1}{6}$$

2 (1 punto)

Sea C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (\cos(t), e^t)$$

Se pide determinar el vector de curvatura en un punto genérico $\vec{x}(t_0)$.



Recordatorio:

$\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ curva

$\vec{x}'(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$ vector velocidad

- Vector tangente (vector unitario en la dirección de $\vec{x}'$)

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|} \quad ; \quad \vec{t} = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$

(derivada respecto longitud de arco)

- Vector de curvatura

$$\vec{k}(s) = \frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2}$$

curvatura $\kappa(s) = \|\vec{k}(s)\|$

$$\vec{k}(s) = \kappa(s)\, \vec{n}(s)$$

- Vector normal (vector normal al vector tangente)

si $\vec{t} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

$\vec{n} = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$

- Cálculo de la curvatura con una parametrización cualquiera

$$\kappa(t) = \frac{\det[\vec{x}', \vec{x}'']}{\|\vec{x}'\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + x'^2)^{3/2}}$$

En nuestro caso

- Vector tangente y vector normal

$$\vec{x}(t) = (\cos(t), e^t) \qquad \vec{x}''(t) = (-\cos(t), e^t)$$

$$\vec{x}'(t) = (-\sin(t), e^t)$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}'(t)}{\|x'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}} \cdot (-\sin(t), e^t)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}} \left(-e^t, -\sin(t)\right)$$

- La curvatura

$$\kappa(t) = \frac{\det\begin{vmatrix} -\sin(t) & e^t \\ -\cos(t) & e^t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}\right)^3} = \frac{-e^t \begin{vmatrix} \sin(t) & 1 \\ \cos(t) & 1 \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}\right)^3} =$$

$$= \frac{-e^t\left(\sin(t) - \cos(t)\right)}{\left(\sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}\right)^3}$$

- El vector de curvatura

$$\vec{k}(t) = \kappa(t)\vec{n}(t) = \frac{-e^t\left(\sin(t) - \cos(t)\right)}{\left(\sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}\right)^3 \sqrt{\sin^2(t) + e^{2t}}} \left(-e^t, -\sin(t)\right)$$

$$= \boxed{\frac{e^t\left(\cos(t) - \sin(t)\right)}{\left(\sin^2(t) + e^{2t}\right)^2} \left(-e^t - \sin(t)\right)}$$

3 (1 punto)

Sea S la superficie dada por

$$\vec{x}(u,v)=(u\cos(v),\ v\sin(u),\ u^2-v^3)$$

Se pide determinar los coeficientes de la primera forma fundamental en el punto $\vec{x}(0,1)$

Recordatorio:

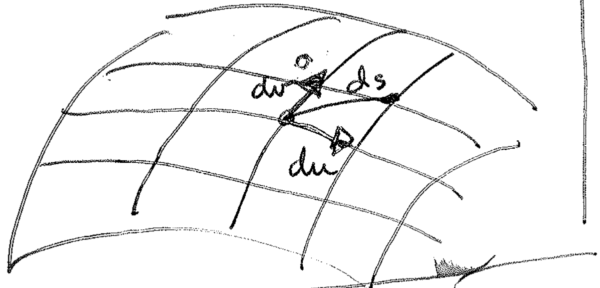
La primera forma fundamental determina en el plano tangente la métrica local

$$ds^2=E(du)^2+2F\,du\,dv+G(dv)^2 \quad \text{(Forma cuadrática)}$$

$$=(du,dv)\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}$$

siendo

$E=\vec{x}_u\cdot\vec{x}_u$; $F=\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v$; $G=\vec{x}_v\cdot\vec{x}_v$



En nuestro caso:

$\vec{x}(u,v)=(u\cos(v),\ v\sin(u),\ u^2-v^3)$; $\vec{x}(0,1)=(0,0,-1)$

$\vec{x}_u=(\cos(v),\ v\cos(u),\ 2u)$; $\vec{x}(0,1)=(\cos(1),1,0)$

$\vec{x}_v=(-u\sin(v),\ \sin(u),\ 3v^2)$; $\vec{x}(0,1)=(0,0,3)$

$$\begin{cases} E(0,1)=\vec{x}_u\cdot\vec{x}_u=(\cos(1),1,0)\cdot(\cos(1),1,0)=\cos^2(1)+1\\ F(0,1)=\vec{x}_u\cdot\vec{x}_v=(\cos(1),1,0)\cdot(0,0,3)=0\\ G(0,1)=\vec{x}_v\cdot\vec{x}_v=(0,0,3)\cdot(0,0,3)=9\end{cases}$$

4 (1 punto)

Los coeficientes de las formas fundamentales de una superficie S en un punto P son
$E=2$, $F=-1$, $G=4$; $e=1$, $f=-1$, $g=1$.
¿Cuál es la curvatura normal en la dirección $(1,-1)$ del plano tangente?

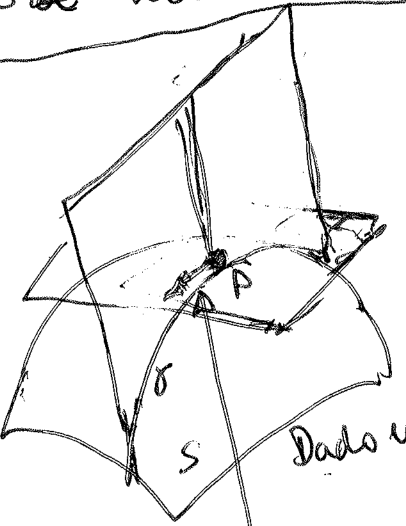
La expresión de la curvatura normal

$$K_n(h,k)=\frac{II_p(h,k)}{I_p(h,k)}=$$

$$=\frac{eh^2+2fhk+gk^2}{Eh^2+2Fhk+Gk^2}\underset{\text{en nuestro caso}}{=}$$

$$=\frac{h^2-2hk+k^2}{2h^2-2hk+4k^2}\underset{\text{para }(h,k)=(1,-1)}{=}$$

$$=\frac{1^2-2\cdot1(-1)+(-1)^2}{2\cdot1^2-2\cdot1\cdot(-1)+4(-1)^2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$



Dado un punto P para una dirección (h,k) del plano tangente se determina un plano normal a S que corta a la superficie en una curva γ

La curvatura de esa curva es K_n

5 (3 puntos)

Sea f función

$$f(x,y,z) = x + y - z$$

Sea S la superficie dada por la ecuación

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$

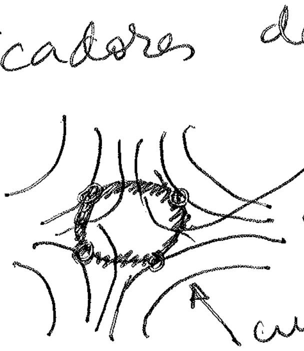
Se pide:

(a) (1 punto) Determinar los puntos candidatos a extremo de la función f sobre la superficie S

(b) (1 punto) De los puntos anteriores, determinar cuáles son extremos y caracterízalos.

(c) (1 punto) Escribir las ecuaciones paramétricas de la superficie S para $z > 0$. Determinar los coeficientes de la primera forma fundamental

Se trata de un problema de extremos condicionados. Hay que usar los Multiplicadores de Lagrange



Recordatorio

Multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Restricción $S \equiv g(x,y,z) = 0$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (1, 1, -1)$$

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (6x, 4y, 2z)$$

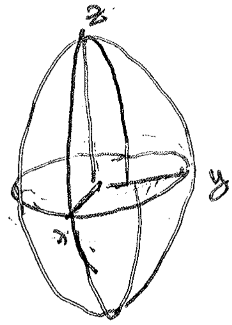
Los puntos críticos verifican este sistema (4ec. con 4 incog.)

$$\begin{cases} 6x = \lambda \\ 4y = \lambda \\ 2z = -\lambda \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ z = -\lambda \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

como λ es un parámetro lo cambiamos

Comentario:

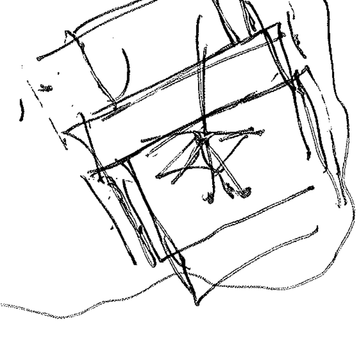
$S \equiv 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ Es un elipsoide de semiejes $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$



· Las curvas de nivel de f son los planos

$$x + y - z = k$$

que tienen vector normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$



"Cambiamos el parámetro λ"

Haciendo

$$\begin{cases} 3x = 6\lambda \\ 2y = 6\lambda \\ z = -6\lambda \\ 3x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -6\lambda \\ 3x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$3(4\lambda^2)+2(9\lambda^2)+36\lambda^2 = 1$$

$$12\lambda^2+18\lambda^2+36\lambda^2=1$$

$$66\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{66}}$$

Así pues, hay dos puntos críticos

- para $\lambda = +\sqrt{\frac{1}{66}} = +\frac{\sqrt{66}}{66}$

$$P_1 = \left(\frac{2\sqrt{66}}{66}, \frac{3\sqrt{66}}{66}, -\frac{6\sqrt{66}}{66}\right) = \left(\frac{\sqrt{66}}{33}, \frac{\sqrt{66}}{22}, -\frac{\sqrt{66}}{11}\right)$$

- Para $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{66}} = -\frac{\sqrt{66}}{6}$

$$P_2 = \left(-\frac{2\sqrt{66}}{2}, -\frac{3\sqrt{66}}{66}, \frac{6\sqrt{66}}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{66}}{33}, -\frac{\sqrt{66}}{22}, \frac{\sqrt{66}}{11}\right)$$

Comentario:

Una comprobación es ver que $P_1 \in S$, $P_2 \in S$

Es decir verifican la ecuación $3x^2+2y^2+z^2=1$

En efecto,

P_1

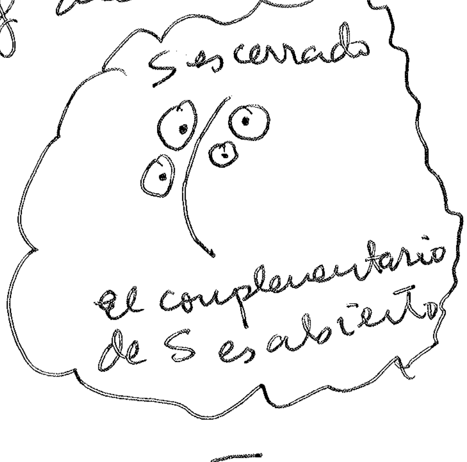
$$3\left(\frac{66}{33^2}\right)+2\left(\frac{66}{22^2}\right)+\frac{66}{11^2}=1$$

P_2

$$3\left(\frac{66}{33^2}\right)+2\left(\frac{66}{22^2}\right)+\left(\frac{66}{11^2}\right)=1$$

(b) Según el teorema de Weierstrass una función continua alcanza sus extremos sobre un conjunto compacto (cerrado y acotado)

Como f es continua y S es cerrado y acotado (compacto) f alcanza sus extremos en S



Para ver la naturaleza de esos extremos calculamos

$$f(P_1)=\frac{2\sqrt{66}}{66}+\frac{3\sqrt{66}}{66}-\frac{-6\sqrt{66}}{66}=\frac{11\sqrt{66}}{66}$$

$$f(P_2)=\frac{-2\sqrt{66}}{66}+\frac{-3\sqrt{66}}{66}-\frac{6\sqrt{66}}{66}=\frac{-11\sqrt{66}}{66}$$

$\Rightarrow$ P_1 es máximo y P_2 es mínimo

(c) Una posible parametrización de la superficie

$$S \equiv 3x^2+2y^2+z^2-1=0$$

es $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{1-3u^2-2v^2}$

$$\vec{x}(u,v)=\left(u,\ v,\ \sqrt{1-3u^2-2v^2}\right)$$

$$\vec{x_u}=\left(1,0,\frac{-3u}{\sqrt{1-3u^2-2v^2}}\right)$$

$$\vec{x_v}=\left(0,1,\frac{-2v}{\sqrt{1-3u^2-2v^2}}\right)$$

los coeficientes de la I forma fundamental

$$E=\vec{x_u}\cdot\vec{x_u}=1+0+\frac{9u^2}{1-3u^2-2v^2}$$

$$F=\vec{x_u}\cdot\vec{x_v}=0+0+\frac{6uv}{1-3u^2-2v^2}$$

$$G=\vec{x_v}\cdot\vec{x_v}=0+1+\frac{4v^2}{1-3u^2-2v^2}$$

Comentario:

Como la superficie S es un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Otra parametrización natural es considerar coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = a \sin(v) \cos(u) \\ y = b \sin(u) \cos(v) \\ z = c \cos(v) \end{cases}$$

En nuestro caso $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c=1$

$$S \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(v) \cos(u) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(u) \cos(v) \\ z = \cos(v) \end{cases}$$

Para esta parametrización

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(v)(-\sin(u)) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(v) \sin(u) \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(v) \cos(u) \\ \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

Por tanto $\vec{x}_u = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(u) \sin(v), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(u) \cos(v) \quad 0\right)$

$\vec{x}_u = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(u) \sin(v), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(u)\cos(v)\right.$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos(u) \cos(v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin(u) \sin(v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = -\sin(v) \end{cases}$$

$$\vec{x_v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos(u) \cos(v), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(u) \sin(v), -\sin(v) \right)$$

Calculamos ahora los coeficientes de la primera forma fundamental para esta parametrización.

$$E = \vec{x_u} \cdot \vec{x_u} = +\frac{1}{3} \sin^2(u) \sin^2 v + \frac{1}{2} \cos^2(u) \cos^2(v) + 0$$

$$F = \vec{x_u} \cdot \vec{x_v} = \frac{1}{3} \sin(u) \cos(u) \sin(v) \cos(v) + \frac{1}{2} \sin(u) \cos(v) + \frac{1}{2} \sin(u) \cos(u) \sin(v) \cos(v), 0)$$

$$G = \vec{x_v} \cdot \vec{x_v} = \frac{1}{3} \cos^2(u) \cos^2(v) + \frac{1}{2} \sin^2(u) \sin^2(v) + \sin^2(v)$$

Observese que si cambiamos de parametrización en un mismo punto de la superficie ~~ellos~~ los coeficientes de la primera forma varían (ver Schaum pagina 183)

COMPLEMENTOS de MATEMÁTICAS

Examen Septiembre 2024

allave@madrid.uned.es

PREGUNTAS CORTAS

1 (1 punto)
Sea $f(x,y) = x^2 + xy$. Se pide determinar la derivada según la dirección de $\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ en el punto $(1,0)$

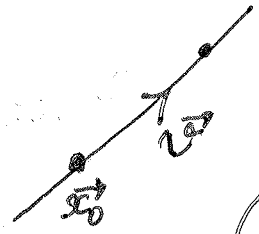
Recordatorio:
Def La derivada direccional de f en el punto $\vec{x_0} = (x_0, y_0)$ según la dirección $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x_0} + t\vec{v}) - f(\vec{x_0})}{t}$$

Esta expresión es igual

$$= \operatorname{grad}(f(\vec{x_0})) \cdot \vec{v} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x_0})\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x_0})\, v_2$$



En nuestro caso

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\operatorname{grad}(f(1,0)) = (2, 1)$$

Con lo cual

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x_0}) =$$

$$= (2,1) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) =$$

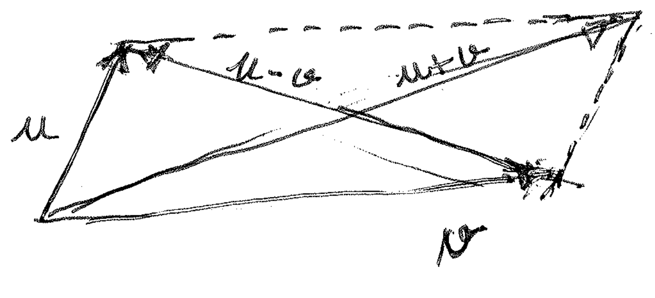
$$= \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

2 (1 punto) Indicar una condición necesaria y suficiente para que una norma este asociada a un producto escalar

(Ver pág 42 del libro)

La identidad del paralelogramo es condición necesaria y suficiente para que una norma venga de un producto escalar

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$$

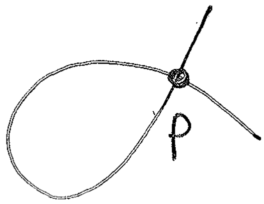


3 (1 punto)

Sea la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^3 + t^2 - t - 1, t^2)$$

Se pide estudiar si C tiene puntos múltiples para $t \in \mathbb{R}$ y determinarlos en caso de que los tenga



P es un punto múltple si existen varios valores de t distintos tal que

$$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) = \dots \vec{x}(t_n)$$

$$\begin{cases} t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 1 = t_2^3 + t_2^2 - t_2 - 1 & [1] \\ t_1^2 = t_2^2 & [2] \end{cases}$$

De la ecuación [2] se deduce que

$t_1 = \pm t_2$

Caso 1 $t_1 = t_2$

No tiene sentido porque para los puntos múltiples tiene que ser $t_1 \neq t_2$

Caso 2 $t_1 = -t_2$

Sustituyendo en [1] $t_2 = -t_1$

$$t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 1 = (-t_1)^3 + (-t_1)^2 - (-t_1) - 1$$

$$t_1^3 + t_1^2 - t_1 - 1 = -t_1^3 + t_1^2 + t_1 - 1$$

$$2t_1^3 - 2t_1 = 0$$

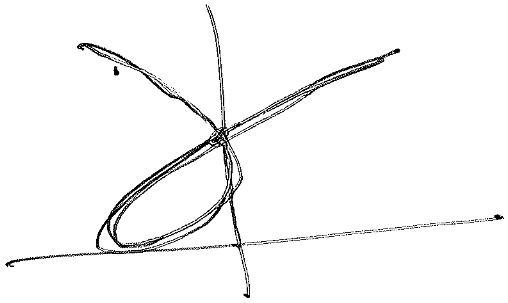
$$t_1(t_1^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_1 = 1 \\ t_1 = -1 \end{cases}$$

Veamos

$\vec{x}(0) = (-1, 0)$

$\vec{x}(1) = (0, 1)$

$\vec{x}(-1) = (0, 1)$



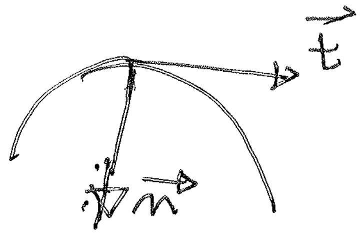
4) (1 punto)

Sea C la curva dada por
$$\vec{x}(t) = (\sin(2t), e^{t^2})$$
Se pide determinar los vectores tangentes y normal en un punto $\vec{x}(t)$ de C

Se trata de una curva plana

El vector tangente es el vector unitario en la dirección de $\vec{x}'$

El vector normal es un vector unitario ortogonal a $\vec{t}$



$$\vec{x}'(t) = \left(2\cos(2t),\ 2te^{t^2}\right)$$

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}'}{\|x'\|} = \frac{1}{\sqrt{(2\cos(2t))^2 + (2te^{t^2})^2}}\left(2\cos(2t),\ 2te^{t^2}\right)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(2\cos(2t))^2 + (2te^{t^2})^2}}\left(-2te^{t^2},\ 2\cos(2t)\right)$$

PROBLEMAS

5 Sea la curva dada por

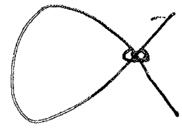
$$\vec{x}(t) = \left(\cos(\pi t),\ t^2-1,\ 2t+1\right)$$

para $t \in [-2,2]$. Se pide

a) (1 punto) Estudiar si tiene puntos múltiples.

b) (1 punto) Determinar el triedro de Frenet en $\vec{x}(0)$.

(c) (1 punto) Determinar la torsión y la curvatura en $\vec{x}(0)$.



(a) Para que tenga puntos múltiples, deben existir $t_1 \neq t_2$ tal que $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$.

Es decir

$$\vec{x}(t_1) = \left(\cos(\pi t_1), t_1^2 - 1, 2t_1 + 1\right) =$$
$$= \left(\cos(\pi t_2), t_2^2 - 1, 2t_2 - 1\right) = \vec{x}(t_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\pi t_1) = \cos(\pi t_2) & [1] \\ t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1 & [2] \\ 2t_1 + 1 = 2t_2 - 1 & [3] \end{cases}$$

La [3] sólo se verifica si $t_1 = t_2$. Por tanto, No hay puntos múltiples.

(b) Para determinar el triedro de Frenet tenemos en cuenta que $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ son vectores unitarios

$$\begin{cases} \vec{t} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}' \\ \vec{b} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}' \times \vec{x}'' \\ \vec{n} \text{ tiene la dirección de } (\vec{x}' \times \vec{x}'') \times \vec{x}' \end{cases}$$

En nuestro caso

$\vec{x}(t) = (\cos(\pi t), t^2 - 1, 2t + 1)$; $\vec{x}(0) = (1, -1, 1)$

$\vec{x}'(t) = (-\pi \sin(\pi t), 2t, 2)$; $\vec{x}'(0) = (0, 0, 2)$

$\vec{x}''(t) = (-\pi^2 \cos(\pi t), 2, 0)$; $\vec{x}''(0) = (-\pi^2, 2, 0)$

$x'''(t) = (\pi^3 \sin(\pi t), 0, 0)$; $\vec{x}'''(0) = (0, 0, 0)$

$$\vec{t}(0) = \frac{1}{\|(0,0,2)\|}(0,0,2) = (0,0,1)$$

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -\pi^2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, -2\pi^2, 0)$$

$$\vec{b}(0) = \frac{1}{\|(-4,-2\pi^2,0)\|}(-4,-2\pi^2,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16+4\pi^4}}(-4,-2\pi^2,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+\pi^4}} = (-2,-\pi^2,0)$$

$$[x'(0) \times x''(0)] \times x'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2\pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4\pi^2, 8, 0)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\|(-4\pi^2,8,0)\|}(-4\pi^2,8,0) = \frac{1}{\sqrt{16\pi^4+64}}(-4\pi^2,8,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^4+4}}(-\pi^2,2,0)$$

Triedro de Frenet

$$\{\vec{t},\vec{n},\vec{b}\} = \left\{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{\pi^4+4}}(-\pi^2,2,0), \frac{1}{\sqrt{\pi^4+4}}(-2,-\pi^2,0)\right\}$$

(c) La curvatura es

$$\kappa(0) = \frac{\|x'(0) \times x''(0)\|}{\|x'(0)\|^3} =$$

En nuestro caso

$$\kappa(0) = \frac{\sqrt{16+4\pi^4}}{2^3} = \frac{\sqrt{4+\pi^4}}{4}$$

La torsión

$$\tau(0) = \frac{\det[\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)]}{\|\vec{x}'(0) \times x''(0)\|} =$$

$$= \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -\pi^2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{16+4\pi^4}} = 0$$

Comentario:

Como $\tau(t)$ ~~para todo~~ t, ya que $\vec{x}'''(t) = 0$

es curva plana

6) Sea S la parte de una esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 dada por la parametrización.

$$\vec{x}(\theta,\phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$$

para $\theta \in (0,2\pi)$, $\phi \in (0,\pi)$. Se pide

(a) (1,5 puntos) Determinar los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental.

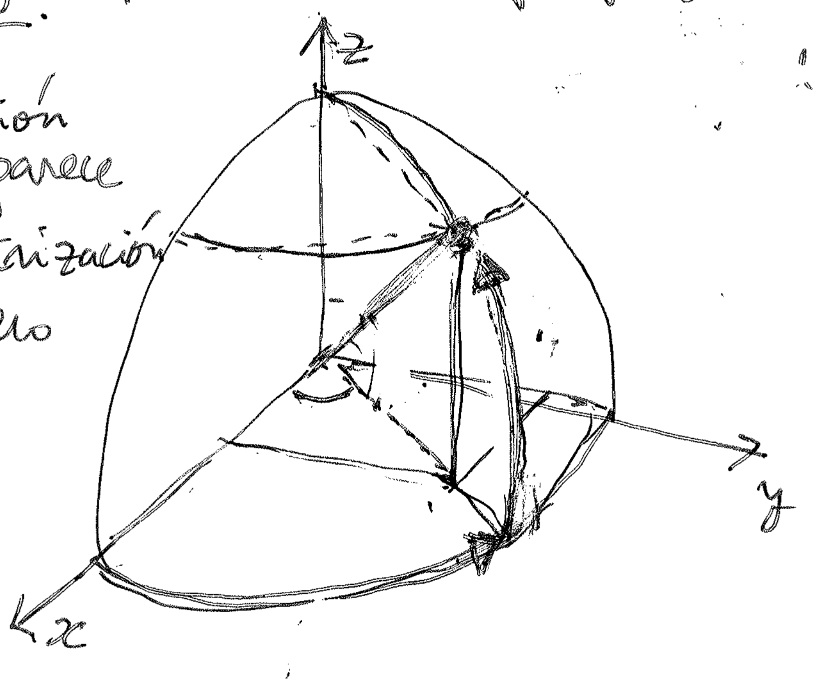
(b) (0,75 puntos) Determinar las curvaturas principales

(c) (0,75 puntos) Determinar la curvatura de Gauss y la curvatura media.

(a) Comentario: parametrización geográfica

La parametrización del problema se parece a la parametrización geográfica, pero no es.

[ver documento geometría de la esfera y el cilindro]



Comentario:

Comprobamos que

$$x^2+y^2+z^2=1$$

En efecto,

$$\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\phi =$$

$$\sin^2\phi\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right] + \cos^2\phi =$$

$$= \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

En un punto (θ,ϕ) para esta parametrización

$$\vec{x}(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\phi)$$

$$\vec{x}_\theta(\theta,\phi) = (-\sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ 0)$$

$$\vec{x}_\phi(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi,\ \sin\theta\cos\phi,\ -\sin\phi)$$

Entonces los coeficientes de I forma

$$E = \vec{x}_\theta\cdot\vec{x}_\theta = \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + 0 =$$

$$= \sin^2\phi\left[\sin^2\theta+\cos^2\theta\right] = \sin^2\phi$$

$$F = \vec{x}_\theta\cdot\vec{x}_\phi = -\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + \cos\theta\sin\theta\sin\phi\cos\phi + 0$$

$$= 0$$

$$G = \vec{x}_\phi\cdot\vec{x}_\phi = \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi =$$

$$= \cos^2\phi\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right] + \sin^2\phi = 1$$

Recordatorio:

Para calcular los coeficientes de II forma fundamental

$$\mathrm{II}(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$ (Mide la distancia al plano tangente)

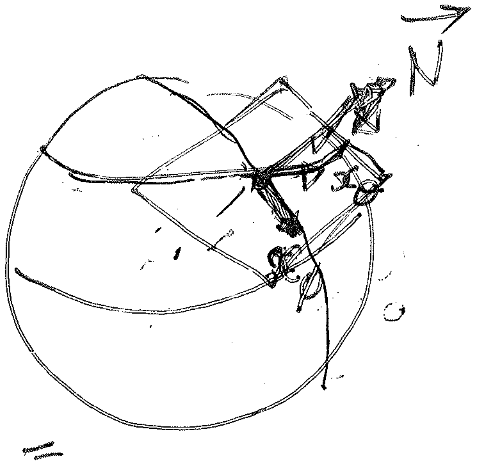
$$\begin{cases} e = \vec{x}_{\theta\theta} \cdot \vec{N} \\ f = \vec{x}_{\theta\phi} \cdot \vec{N} \\ g = \vec{x}_{\phi\phi} \cdot \vec{N} \end{cases}$$ [donde $\vec{N}$ es el vector normal unitario al plano tangente]

$\vec{x}_{\theta\theta} = (-\cos\theta \sin\phi, -\sin\theta \sin\phi, 0)$

$\vec{x}_{\theta\phi} = (-\sin\theta \cos\phi, \cos\theta \cos\phi, 0)$

$\vec{x}_{\phi\phi} = (-\cos\theta \sin\phi, -\sin\theta \sin\phi, -\cos\phi)$

$\vec{N}$ es el unitario en la dirección de $\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\phi$



$\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\phi =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} =$$

$$= (-\cos\theta \sin^2\phi, -\sin\theta \sin^2\phi, -\sin^2\theta \cos\phi \sin\phi - \cos^2\theta \sin\phi \cos\phi)$$

$$= (-\cos\theta \sin^2\phi, -\sin\theta \sin^2\phi, -\cos\phi \sin\phi)$$

$$\|\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\phi\| = \sqrt{(-\cos\theta\sin^2\phi)^2 + (-\sin\theta\sin^2\phi)^2 + (-\cos\phi\sin\phi)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\theta\sin^4\phi + \cos^2\phi\sin^2\phi} =$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] + \cos^2\phi\sin^2\phi} =$$

$$= \sqrt{\sin^4\phi + \cos^2\phi\sin^2\phi} = \sqrt{\sin^2\phi\left[\sin^2\phi + \cos^2\phi\right]}$$

$$= \sin\phi$$

con lo cual

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\phi}{\|\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\phi\|} = \frac{1}{\sin\phi}\left(-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\cos\phi\sin\phi\right)$$

$$= (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi)$$

$$\vec{e} = \vec{x}_{\theta\theta} \cdot \vec{N} = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\sin\phi) \cdot$$

$$\cdot (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, 0) =$$

$$= \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + 0 = \sin^2\phi\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] =$$

$$= \sin^2\phi$$

$$f = \vec{x}_{\theta\phi} \cdot \vec{N} = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \cdot$$

$$\cdot (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi)$$

$$= \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi - \sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + 0$$

$$= 0$$

$$g = \vec{x}_{\phi\phi} \cdot \vec{N} = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi) \cdot$$

$$\cdot (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi) =$$

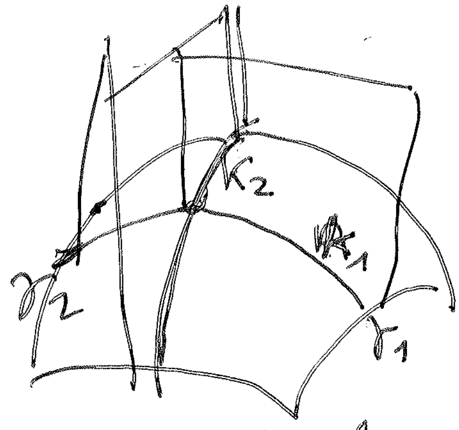
$$= \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi =$$

$$= \sin^2\phi\,[\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\phi =$$

$$= 1$$

(b)

(b) Las curvaturas principales son las de las secciones normales que tienen curvatura máxima y mínima (direcciones principales)



Recordatorio

- las curvaturas normales (según la sección de dirección (du, dv) del plano tangente)

$$\chi_n = \frac{II(du,dv)}{I(du,dv)}$$

- Las direcciones principales son las soluciones de

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

$e = L$
$f = M$
g N

- Las curvaturas principales K_1 y K_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} K^2 - \left\{ \begin{vmatrix} E & f \\ F & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e & F \\ f & G \end{vmatrix} \right\} K + \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = 0$$

Comentario En una esfera para todos sus puntos las secciones normales tienen la misma curvatura $= \frac{1}{R}$. Todos sus puntos son umbílicos.

Con argumentos intuitivos, basados en la geometría de la esfera. En todos supuestos la curvatura de las secciones normales es

$$K = \frac{1}{R} = \frac{1}{1} = 1$$

y todas las direcciones son principales

En nuestro caso del apartado (a)

$$\boxed{\begin{array}{lll} E = \sin^2\phi \ ; & F = 0 \ ; & G = 1 \\ e = \sin^2\phi & f = 0 \ ; & g = 1 \end{array}}$$

Todas las curvaturas normales son

$$K_n = \frac{II\,(du\,dv)}{I\,(du\,dv)} = \frac{\sin^2\phi\, du^2 + 0\, du dv + 1 dv^2}{\sin^2\phi\, du^2 + 0\, du dv + 1 dv^2} =$$

$$= 1$$

por tanto hay sólo una curvatura principal $K = 1$

todas las direcciones son direcciones principales.

c) La curvatura de Gauss es constante $K_1 \cdot K_2 = 1 \cdot 1 = 1$ y la curvatura media

$$\frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{1}{2}$$