(plan 2024)

Curvatura de una Superficie

allave@madrid.uned.es

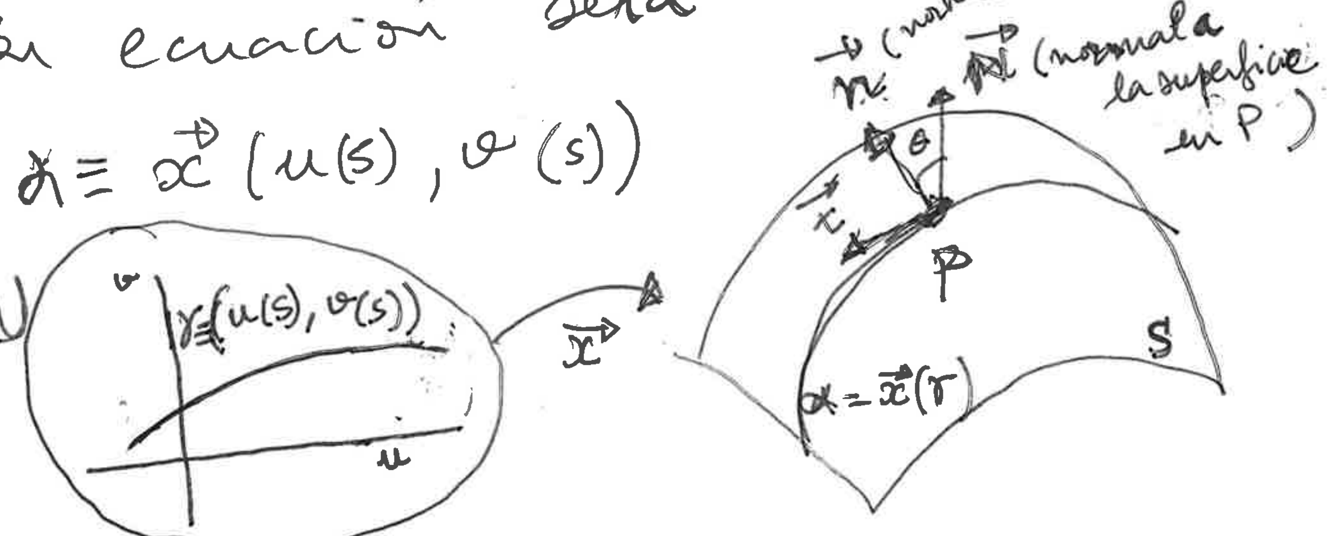
Sea

S es una superficie $\vec{x}(u,v)$

α es una curva parametrizada por la longitud de arco, que está contenida en la superficie S

Su ecuación será

$$\alpha \equiv \vec{x}\,(u(s),\, v(s))$$



Sea $\vec{n}$ el vector normal de la curva α.

Según la fórmula de Frenet

$$\vec{n} = k\,\frac{d\vec{t}}{ds}$$ (k curvatura de α)

$\vec{N}$ es el vector normal a la superficie en P $\left[\vec{N} = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}\right]$

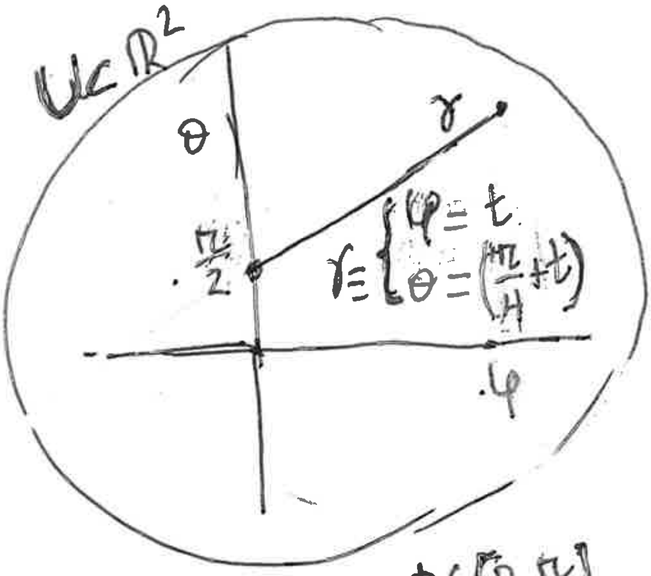
El vector tangente a la curva α es

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}(u(s), v(s))}{ds} = \vec{x}_u \cdot \frac{du}{ds} + \vec{x}_v\,\frac{dv}{ds}$$

Curva sobre una superficie

Ejemplo : Esfera

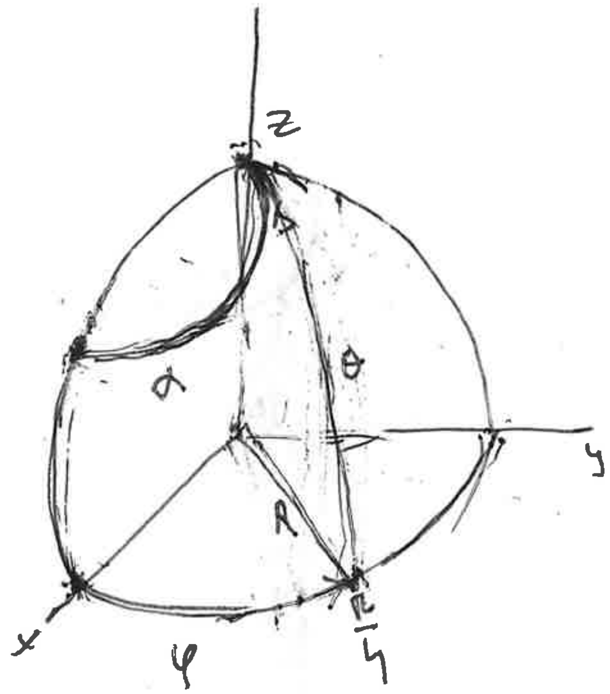
$$\vec{x}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x = R\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z = R\sin(\theta) \end{pmatrix}$$



$t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\xrightarrow{\vec{x}} \quad \alpha \equiv \begin{cases} x = R\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\cos(t) \\ y = R\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\cos(t) \\ z = R\sin\left(\frac{\pi}{4}, \theta\right) \end{cases}$$

φ = longitud Este
θ = latitud Norte



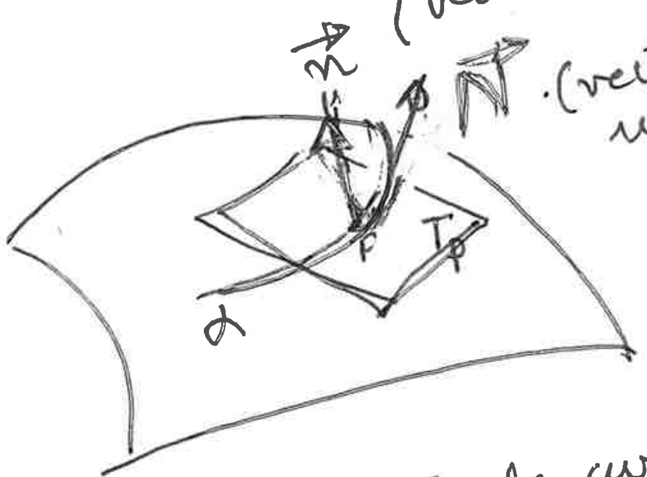
CURVATURA NORMAL y CURVATURA GEODÉSICA

Consideremos una curva α contenida en una superficie S

La superficie tiene por ecuación $\vec{x}(u,v)$

La curva (parametrizada por la longitud de arco)

$$\alpha(s) = \vec{x}(u(s), v(s))$$



Recordatorio teoría de curvas

vector tangente : $\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$ (vector unitario)

vector curvatura $\vec{k}(s) = \dfrac{d\vec{t}(s)}{ds} = \dfrac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2} = k\,\vec{n}$

Es un vector en la dirección de $\vec{n}$

Si usamos una parametrización cualquiera

- El vector $\vec{n}$ es el vector unitario en la dirección de $[\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)] \times \vec{\alpha}'(t)$

- La curvatura $K(t) = \dfrac{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}$

El vector de curvatura de α se descompone en dos componentes

- Una en la dirección de $\vec{N}$ (vector ortogonal al plano tangente)
- Otra en el plano tangente

$$\vec{k} = \vec{k_n} + \vec{k_g}$$

$\vec{k}$: vector de curvatura

$\vec{k_n}$: curvatura normal (en la dirección de $\vec{N}$)

$\vec{k_g}$: curvatura geodesica $\vec{k_g} \in T_p$

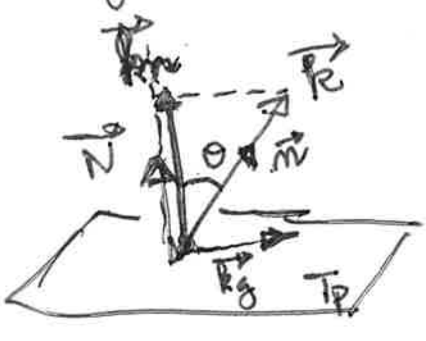
- Se llama curvatura normal

$$k_n = \|\vec{k_n}\|$$

- Se llama curvatura geodésica

$$k_g = \|\vec{k_g}\|$$

¿Como se calcula la curvatura normal y la curvatura geodésica?



- $\vec{k} = k\vec{n}$ = vector de curvatura
- $\vec{k_n}$ = vector de curvatura normal
- $\|\vec{k_n}\| = k_n$ = curvatura normal

$$\vec{N} \cdot \vec{k} = \|\vec{N}\| \cdot \|\vec{k}\| \cos(\theta) = \|\vec{k}\| \cos(\theta)$$

$$= \|\vec{k_n}\| = k_n = (\vec{N} \cdot \vec{n})k$$

$$= k\cos\theta$$

Si derivamos $\vec{t}$ respecto de s

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\vec{x}_u \frac{du}{ds} + \vec{x}_v \frac{dv}{ds}\right] =$$

cada sumando se deriva como un producto usando la regla de la cadena

$$= \left[\vec{x}_{uu}\frac{du}{ds} + \vec{x}_{uv}\cdot\frac{dv}{ds}\right]\frac{du}{ds} + \vec{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} +$$

$$+ \left[\vec{x}_{vu}\frac{du}{ds} + \vec{x}_{vv}\frac{dv}{ds}\right]\frac{dv}{ds} + \vec{x}_v \cdot \frac{d^2v}{ds^2} =$$

$$= \vec{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \vec{x}_{uv}\frac{du\,dv}{(ds)^2} + \vec{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} +$$

$$+ \vec{x}_{vu}\frac{du\,dv}{(ds)^2} + \vec{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{x}_v \frac{d^2v}{ds^2} \quad [1]$$

Calculamos el ángulo θ que forman $\vec{n}$ y $\vec{N}$

$$\cos\theta = \vec{n}\cdot\vec{N} = \frac{1}{k}\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{N}$$

$$\Rightarrow k\cos(\theta) = \frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{N}$$

$$[1] = \frac{d\vec{t}}{ds} = k\,\vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{k}\frac{d\vec{t}}{ds}$$

Para hallar este producto escalar

$$[1] \cdot \vec{N}$$

tendremos en cuenta que como $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$ están en el plano tangente, $\vec{x}_u \cdot \vec{N} = 0$ y $\vec{x}_v \cdot \vec{N} = 0$

Así pues,

$$K\cos(\theta) = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\, \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \frac{du\,dv}{(ds)^2} + \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

Si llamamos
$$\begin{cases} e = L = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \\ f = M = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \\ g = N = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} \end{cases}$$
[Los coeficientes de la II forma fundamental]

$$K\cos(\theta) = \frac{e(du)^2 + 2\, f\, du\,dv + g\,(dv)^2}{(ds)^2} =$$

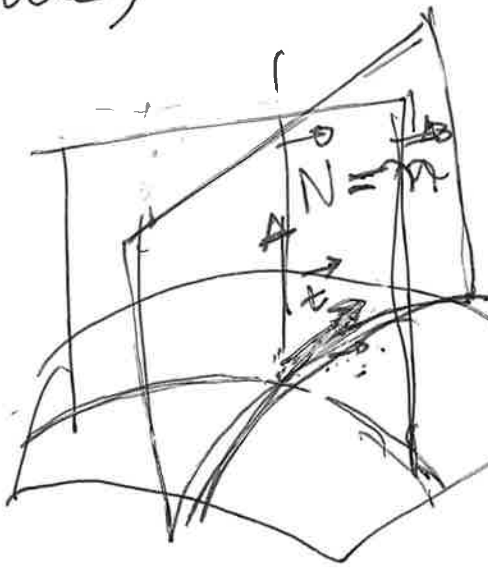
Si recordamos que la I forma fundamental

$$(ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = [\vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv] \cdot [\vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv]$$
$$= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u\, (du)^2 + 2\, \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v\, du\,dv + \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v\, (dv)^2$$
$$= E(du)^2 + 2F\, du\,dv + G(dv)^2 = I(du, dv)$$

$$k\cos(\theta) = \frac{e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g(dv)^2}{E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2} = \frac{II(du\,dv)}{I(du\,dv)}$$

Si α es una curva que se obtiene por la sección de la curva por un plano normal (según la dirección (du, dv) del plano tangente) se tiene que $\theta = 0$

$(\Rightarrow \cos(\theta) = 1)$

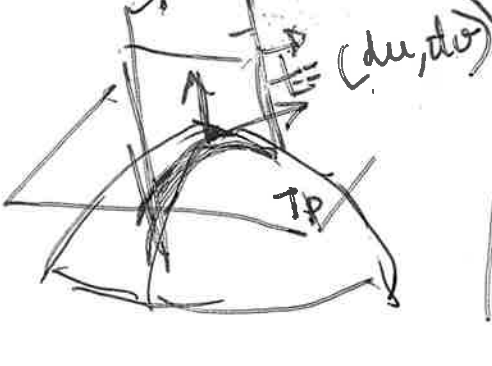


En las secciones normales $\vec{n} = \vec{N}$, $\vec{t} = (du, dv)$

de modo que la curvatura normal es

$$\boxed{k_n = \frac{II(du,dv)}{I(du,dv)}}$$

para el plano normal que se interseca con el plano tangente en la dirección $\vec{t} = (du, dv)$ (tangente de la curva) de intersección del plano con la superficie



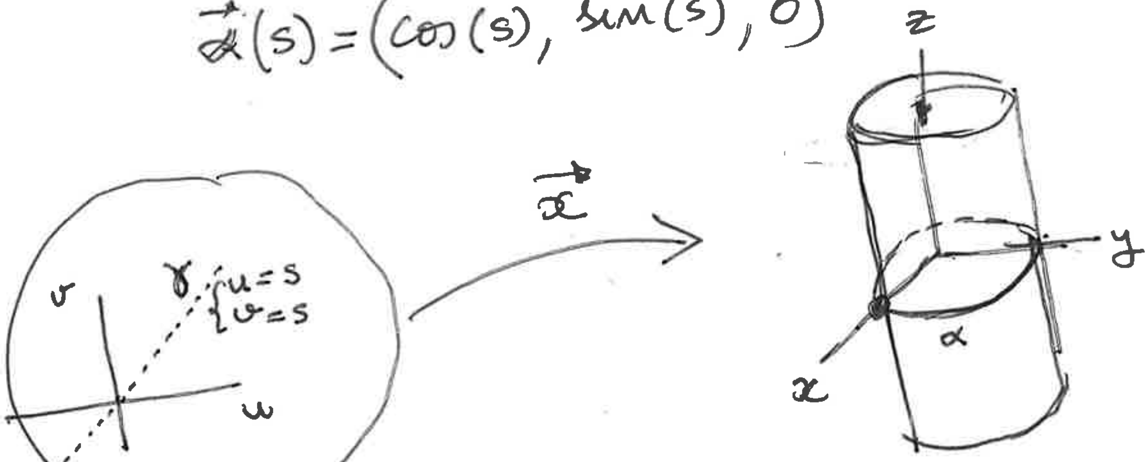
Ejemplo (pag 194)

Sea el cilindro dado por

$$\vec{x}(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

Consideremos la circunferencia dada por

$$\vec{\alpha}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$$



$\alpha = \vec{x}(\gamma)$

Calcular los vectores de curvatura normal y la curvatura geodésica de la curva α en el punto $\vec{\alpha}(0) = (1,0,0) = \vec{x}(0,0)$

En nuestro caso

$$\vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0) \rightarrow \vec{x}_u(0,0) = (0,1,0)$$

$$\vec{x}_v = (0,0,1) \rightarrow \vec{x}_v(0,0) = (0,0,1)$$

El plano tangente es $\langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

el vector ~~ortogonal~~ del plano tangente es

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{(-\sin(u), \cos(u), 0) \times (0,0,1)}{\|(-\sin(u), \cos(u), 0) \times (0,0,1)\|} =$$

$$= (\cos(u), \sin(u), 0)$$

5 ter

$\vec{N}(0,0) = (\cos(0), \sin(0), 0) = (1,0,0)$

coincide con hacerlo den el caso particular directamente

$$\vec{N}(0,0) = (0,1,0)\times(0,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

Calculamos ahora el vector de curvatura de varias maneras.

1) Calculamos el vector tangente de α

$$\vec{t} = \frac{d}{ds}(\cos(s), \sin(s), 0) = (-\sin(s), \cos(s), 0)$$

Calculemos el vector de curvatura

$$\vec{k} = \frac{d}{ds}\vec{t} = \frac{d}{ds}(-\sin(s), \cos(s), 0) =$$

$$= (-\cos(s), -\sin(s), 0)$$

para $s=0$

$$\vec{k}(0) = (-1, 0, 0)$$

Si ahora descomponemos

$$\vec{k}(0) = \underbrace{(-1,0,0)}_{\substack{\text{en la}\\ \text{dirección}\\ \text{de } \vec{N}}} + \underbrace{(0,0,0)}_{\substack{\text{pertenece}\\ \text{al plano}\\ \text{tangente}}}$$

$$\vec{k} = k_n + k_g \Rightarrow \begin{cases} \vec{k}_n = (-1,0,0) \\ k_g = (0,0,0) \end{cases}$$

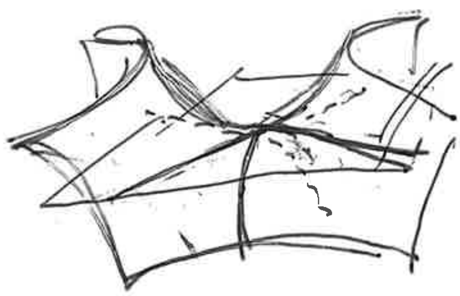
Curvatura normal $K_n = \|(-1,0,0)\| = 1$

$K_g = \|(0,0,0)\| = 0$

Direcciones asintóticas

Son las direcciones en las que la curvatura normal es cero
(la curva está en el plano tangente)
Es decir, son las soluciones

de $\chi_n = 0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \mathrm{II}(du, dv) = 0$$

$$\Rightarrow e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = 0$$
$$\Rightarrow e + 2f\left(\frac{dv}{du}\right) + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

Direcciones principales

Los valores máximo y mínimo de las curvaturas normales se llaman curvaturas principales

K_1 y K_2

El máximo y el mínimo de χ_n se obtiene haciendo $\frac{\partial}{\partial u}\chi_n = 0$ $\frac{\partial}{\partial v}\chi_n = 0$

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -du\,dv & (du)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

Si la curvatura normal en la dirección $(h=du,\ k=dv)$

$$\chi_n(h,k) = \frac{e h^2 + 2 f hk + g k^2}{E h^2 + 2F hk + G k^2} = \frac{II(h,k)}{I(h,k)}$$

Los extremos verifican

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi_n}{\partial h} = \dfrac{I(h,k)(2eh+2fk) - II(h,k)(2Eh+2Fk)}{I(h,k)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \chi_n}{\partial k} = \dfrac{I(h,k)(2fh+2Nk) - II(h,k)(2Eh+2Gk)}{I(h,k)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} (2eh+2fk) - \chi_n(h,k)(2Eh+2Fk) = 0 \\ (2fh+2gk) - \chi_n(h,k)(2Fh+2Gk) = 0 \end{cases}$$

Si suponemos que $\chi_n(h,k) \neq 0$, eliminandolo en ambas ecuaciones

$$\frac{2eh+2fk}{2Eh+2Fk} = \frac{2fh+2gk}{2Fh+2Gk} = \chi_n$$

$$(2eh+2fk)(2Fh+2Gk) - (2fh+2gk)(2Eh+2Fk) = 0$$

$$(eh+fk)(Fh+Gk) - (fh+gk)(Eh+Fk) = 0$$

$$(eF - fE)h^2 + (eG + fF - fF - gE)hk + (fG - gF)k^2 = 0$$

$$(fE - eF)du^2 + (gE - eG)\,du\,dv + (Fg - fG)dv^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -du\,dv & (du)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

[dividiendo por $(du)^2$]

$$\boxed{(Ef - Fe) + (Eg - Ge)\frac{dv}{du} + (Fg - Gf)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0}$$

Ecuaciones de las direcciones principales

los puntos en los que

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = cte$$

Se llaman <u>puntos umbílicos</u>

(Todas las direcciones pueden considerarse principales $K_n = cte$ $(\Rightarrow K_1 = K_2)$]

en la esfera todos los puntos son umbílicos

Teorema En cada punto, no umbílico, las dos direcciones principales son perpendiculares

Demostración

Si una dirección principal es (du, dv), la pendiente $\frac{dv}{du} = \mu$ verifica

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)\mu + (Fg - Gf)\mu^2 = 0 \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Dos direcciones $(1, \mu_1)$, $(1, \mu_2)$ son perpendiculares con la métrica del plano tangente si su producto escalar es 0

$$(1, \mu_1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(E + \mu_1 F, F + \mu_1 G)\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = E + \mu_1 F + F\mu_2 + \mu_1\mu_2 G = 0$$

$$E + F\mu_1 + F\mu_2 + G\mu_1\mu_2 = 0$$

$$E + F(\mu_1 + \mu_2) + G(\mu_1\mu_2) = 0$$

(**)

Las direcciones principales $(1, \mu)$ son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado (*)

La suma de las soluciones es

En una ec de segundo grado

$a x^2 + bx + c = 0$

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{Ge - Eg}{Fg - Gf}$$

El producto de las soluciones es

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{Ef - Fe}{Fg - Gf}$$

Estos valores verifican la condición (**) de ortogonalidad

En efecto,

$$E + F\left(\frac{Ge - Eg}{Fg - Gf}\right) + G\left(\frac{Ef - Fe}{Fg - Gf}\right) =$$

$$= \frac{E(Fg - Gf) + F(Ge - Eg) + G(Ef - Fe)}{FN - GM} =$$

$$= \frac{\cancel{EFg} - \cancel{EGf} + \cancel{FGe} - \cancel{FEg} + \cancel{GEf} - \cancel{GFe}}{Fg - Gf} = 0$$

Al producto de las curvaturas principales se llama CURVATURA TOTAL o de GAUSS

$$K_t = K_1 \cdot K_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

La media de las curvaturas principales se llama CURVATURA MEDIA

$$K_m = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

Ecuación de las curvaturas principales

Eran las ecuaciones de las curvaturas normales *

$$\begin{cases} e h + f k - K_n(h,k)\,(Eh+Fk) = 0 \\ f h + g k - K_n(h,k)\,(Fh+Gk) = 0 \end{cases}$$

si consideramos la dirección $(1,\mu)$

$$\begin{cases} (e+f\mu) - K_n\,(E+F\mu) = 0 \\ (f+g\mu) - K_n\,(F+G\mu) = 0 \end{cases}$$

Eliminando μ

$$\begin{cases} e + f\mu - KE - KF\mu = 0 \\ f + g\mu - KF - KG\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(f - KF) = KE - e \\ \mu(g - KG) = KF - f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{KE-e}{f-KF} = \frac{KF-f}{g-KG} \Rightarrow (KE-e)(g-KG) - (f-KF)(KF-f) = 0$$

$$(-EG+F^2)K^2 + (Eg+Ge-Ff-Ff)K + (-eg+f^2) = 0$$

$$(-EG+F^2)K^2 + (Eg+Ge-2Ff)K + (eg-f^2) = 0 \quad [\triangle]$$

$$(EG-F^2)K^2 - (Eg+Ge-2Ff)K$$

de esta ecuación de 2º grado se deduce una expresión para K_1 y K_2

Otra forma

$$\boxed{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} K^2 - \left\{ \begin{vmatrix} E & f \\ F & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e & F \\ f & G \end{vmatrix} \right\} K + \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = 0}$$

De la relación que hay entre ~~las~~ suma y el producto de las raíces K_1 y K_2 de esta ecuación se obtiene que

$$X_t = K_1 \cdot K_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$X_m = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}$$

curvatura de Gauss (o total)

$$K_t = K_1 \cdot K_2$$

Es una característica que define la superficie.

Dos superficies con distintinta curvatura total no pueden adaptarse una a otra sin romperse o estirarse

Por ejemplo un plano y un cilindro pueden adaptarse ~~uno~~ a otro, pero no un plano y una esfera o una esfera o otra de distinto tamaño

En la geometría intrínseca son muy importantes las superficies que tienen la misma curvatura total en todos sus puntos. Esto da origen a las geometrías no-euclídeas

Teorema Egregio de Gauss: La curvatura gaussiana puede determinarse por completo midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie. Es decir la curvatura total es un invariante intrísco de la superfice (la curvatura gaussiana es invariante bajo isometrías locales)

La propiedad más notable de la curvatura de Gauss (propiedad que explica su gran significado en la teoría de superficies) es la siguiente. Supongamos que la superficie es de un material flexible pero inextensible — por ejemplo una hoja delgada de estaño — de modo que podemos combarla de distintas formas sin estirarla ni romperla. Durante este proceso las curvaturas principales cambiarán, como probó Gauss, pero el producto $k_1 \cdot k_2$ permanecerá invariable en cada punto. Este resultado fundamental prueba que dos superficies con diferentes curvaturas de Gauss son inherentemente distintas entre sí, consistiendo esa diferencia en el hecho de que si las deformamos de todas las formas posibles, sin estirarlas ni romperlas, nunca podemos superponer una sobre otra. Por ejemplo, un segmento de la superficie de una esfera ~~nunca~~ podrá deformarse de tal forma que se adapte a un plano o la superficie de una esfera a otra de distinto radio

[La Matemática: su contenido, métodos y significado II pag 113]

Curvatura media

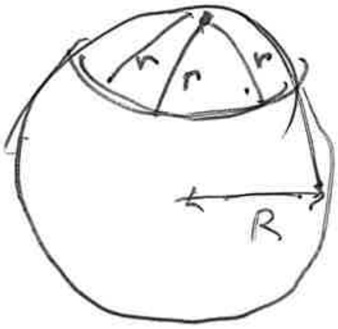
$$K_m = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

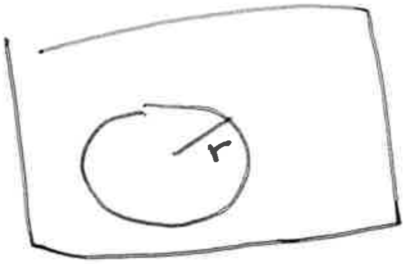
La característica que define las superficies mínimas (pompas de jabón) es que en todos sus puntos la curvatura media es cero

Intuitivamente en las superficies mínimas la suma de tensiones superficiales en todas las direcciones suman cero

Geometría Intrínseca

Son las propiedades geométricas que sólo dependen de las medidas de longitudes



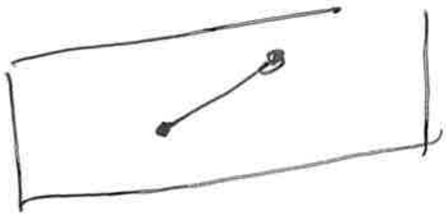


En una esfera

$S(r) = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$

En un plano la longitud de una circunferencia es $S(r) = 2\pi r$

En un cilindro y un plano



tienen la misma geometría intrínseca

Las superficies equivalentes a un plano ($K_g=0$) son las superficies "desarrollables" que

son envolventes de planos (cilindros, conos, hiperboloide las regladas, ---) banda de Möbius)