

(plan 2024)

curvatura de
una superficie

allave @ madrid.uned.es

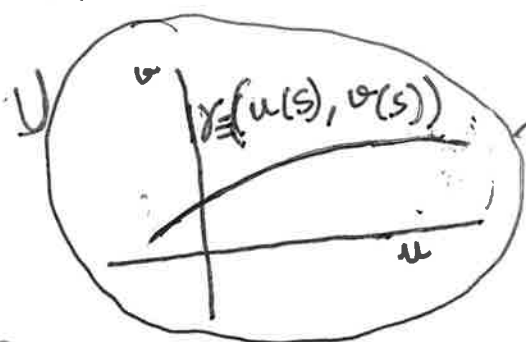
Sea

(1) es una superficie $\vec{x}(u, v)$

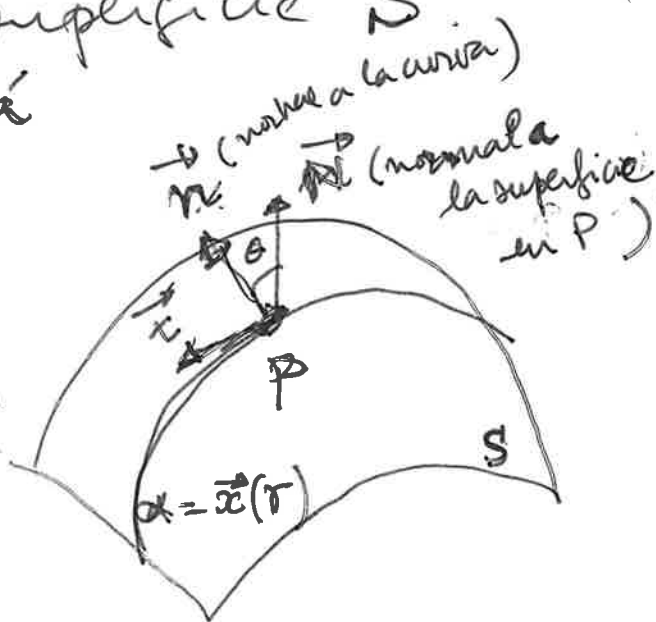
(2) es una curva parametrizada por la longitud de arco, que está contenida en la superficie S

su ecuación será

$$\alpha \equiv \vec{x}(u(s), v(s))$$



$\vec{x}$



Sea

(3) $\vec{n}$

el vector normal de la curva α .

Según la fórmula de Frenet

$$\vec{n} = k \frac{d\vec{T}}{ds}$$

(k curvatura de α)

(4) $\vec{N}$

es el vector normal a la superficie en P $\left[\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} \right]$

El vector tangente a la curva α es

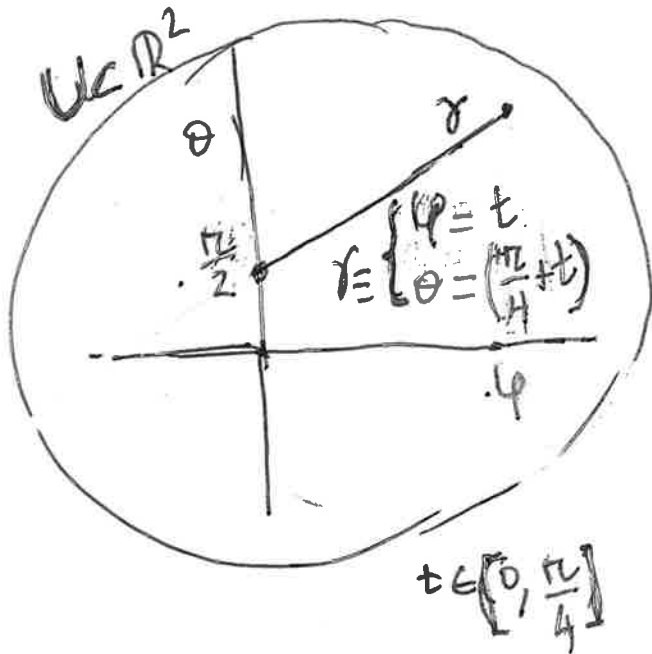
$$\vec{T} = \frac{d\vec{x}(u(s), v(s))}{ds} = \vec{x}_u \cdot \frac{du}{ds} + \vec{x}_v \cdot \frac{dv}{ds}$$

Curva sobre uma superfície

(2 bis)

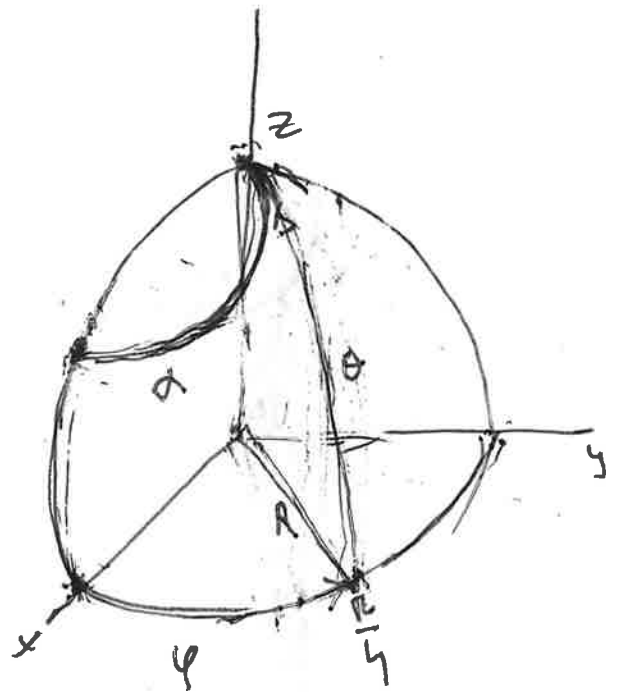
Exemplo : Esfera

$$\vec{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x = R \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ y = R \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ z = R \sin(\theta) \end{pmatrix}$$



$$\vec{x} \equiv \begin{cases} x = R \cos(\frac{\pi}{4} + t) \cos(t) \\ y = R \cos(\frac{\pi}{4} + t) \cos(t) \\ z = R \sin(\frac{\pi}{4}, \theta) \end{cases}$$

φ = longitude Este
 θ = latitude Norte

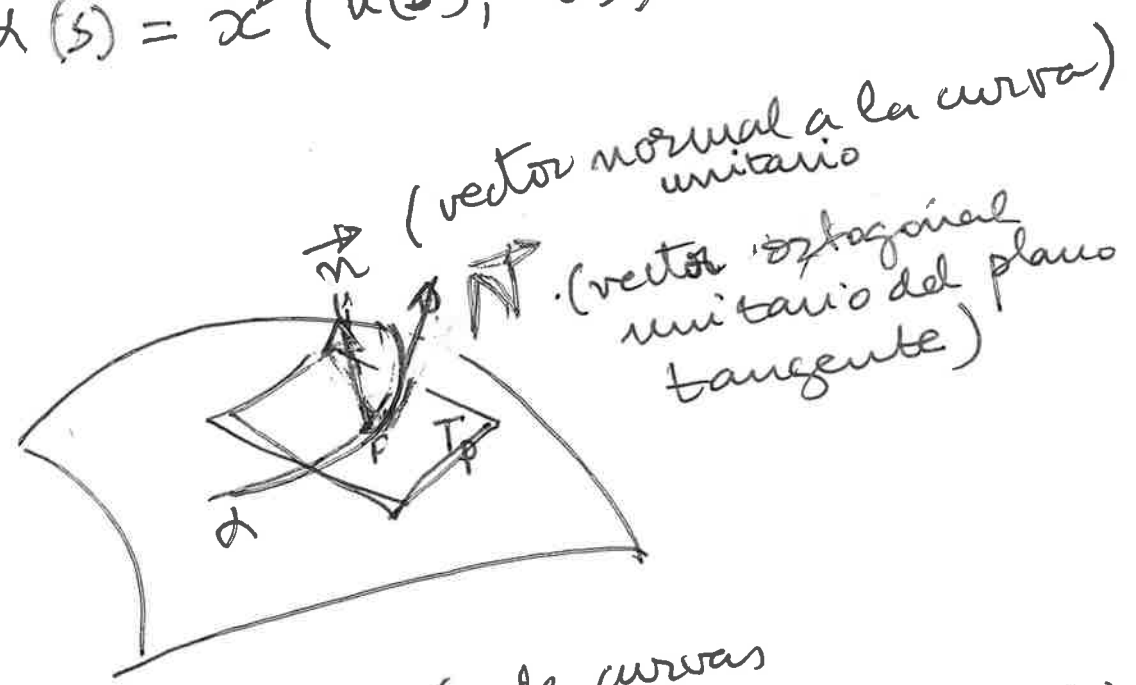


CURVATURA NORMAL Y CURVATURA GEODÉSICA

Consideremos una curva α contenida en una superficie S

la superficie tiene por ecuación $\vec{x}(u,v)$
la curva (parametrizada por la longitud de arco)

$$\alpha(s) = \vec{x}(u(s), v(s))$$



Recordatorio teoría de curvas

vector tangente : $\vec{T}(s) = \vec{x}'(s)$ (vector unitario)
vector curvatura : $\vec{K}(s) = \frac{d\vec{T}(s)}{ds} = \frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2} = k \vec{n}$

Es un vector en la dirección de $\vec{n}$

Si usamos una parametrización cualquiera

- El vector $\vec{n}$ es el vector unitario en la dirección de $[\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)] \times \vec{\alpha}'(t)$
- la curvatura $K(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}$

El vector de curvatura de α se descompone en dos componentes

2
ter

- Una en la dirección de $\vec{N}$ (vector ortogonal al plano tangente)
- Otra en el plano tangente

$$\vec{\rho}_R = \vec{k}_n + \vec{k}_g$$

$\uparrow$ vector de curvatura $\uparrow$ curvatura normal (en la dirección de $\vec{N}$) $\uparrow$ curvatura geodésica $\vec{k}_g \in T_p$

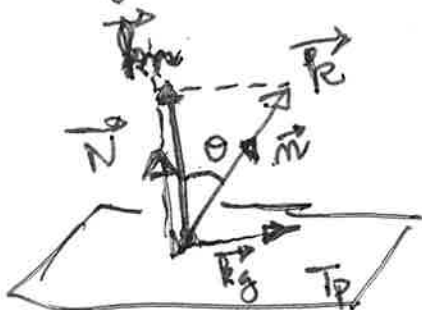
Se llama curvatura normal

$$k_n = \|\vec{k}_n\|$$

Se llama curvatura geodésica

$$k_g = \|\vec{k}_g\|$$

¿Cómo se calcula la curvatura normal y la curvatura geodésica?



- $\vec{k} = k\vec{m}$ = vector de curvatura
- $\vec{k}_n$ = vector de curvatura normal
- $\|\vec{k}_n\| = k_n$ = curvatura normal

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \vec{k} &= \|\vec{N}\| \cdot \|\vec{k}\| \cos(\theta) = \|\vec{k}\| \cos(\theta) \\ &= \|\vec{k}_n\| = k_n = (\vec{N} \cdot \vec{m}) k \\ &= k \cos \theta \end{aligned}$$

Si derivamos $\vec{T}$ respecto de s

(3)

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\vec{x}_u \frac{du}{ds} + \vec{x}_v \frac{dv}{ds} \right] = \uparrow \text{ cada sumando se deriva como un producto usando la regla de la cadena}$$

$$= \left[\vec{x}_{uu} \frac{du}{ds} + \vec{x}_{uv} \frac{dv}{ds} \right] \frac{du}{ds} + \vec{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \left[\vec{x}_{vu} \frac{du}{ds} + \vec{x}_{vv} \frac{dv}{ds} \right] \frac{dv}{ds} + \vec{x}_v \frac{d^2v}{ds^2} =$$

$$= \vec{x}_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \vec{x}_{uv} \frac{du dv}{(ds)^2} + \vec{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{x}_{vu} \frac{du dv}{(ds)^2} + \vec{x}_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \vec{x}_v \frac{d^2v}{ds^2} \quad [1]$$

Calculamos el ángulo θ que forman $\vec{m}$ y $\vec{N}$

$$\cos \theta = \vec{m} \cdot \vec{N} = \frac{1}{K} \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N}$$

$$\Rightarrow K \cos(\theta) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N}$$

$$\uparrow [1] = \frac{d\vec{T}}{ds} = K \vec{m} \Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{K} \frac{d\vec{T}}{ds}$$

Para hallar este producto escalar

(4)

$$[1] \cdot \vec{N}$$

tendremos en cuenta que
como $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$ están en el plano
tangente, $\vec{x}_u \cdot \vec{N} = 0$ y $\vec{x}_v \cdot \vec{N} = 0$

Así pues,

$$K \cos(\theta) = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2 \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \frac{du dv}{(ds)^2} + \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$\text{Si llamamos } \begin{cases} e = L = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \\ f = M = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \\ g = N = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} \end{cases}$$

[Los coeficientes de la II forma fundamental]

$$K \cos(\theta) = \frac{e(du)^2 + 2f du dv + g(dv)^2}{(ds)^2} =$$

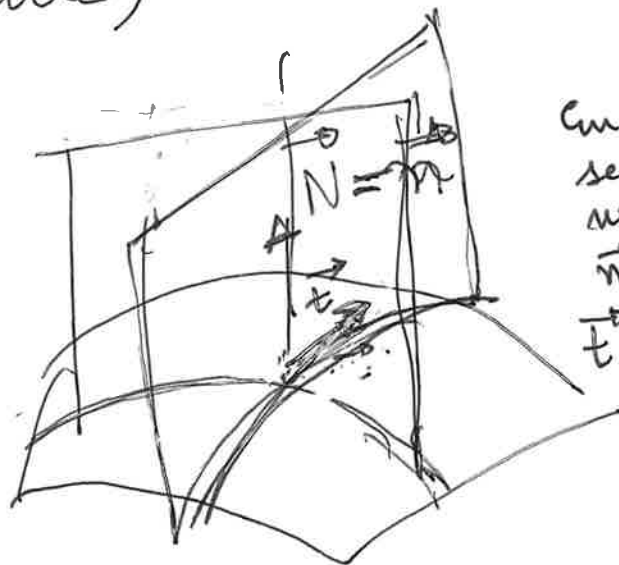
Si recordamos que la I forma fundamental

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\vec{x} \cdot d\vec{x} = [\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv] \cdot [\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv] \\ &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u (du)^2 + 2\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v du dv + \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v (dv)^2 \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 = I(du, dv) \end{aligned}$$

$$K \cos(\theta) = \frac{e(du)^2 + 2f du dv + g(dv)^2}{E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2} = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)} \quad (5)$$

Si α es una curva que se obtiene por la sección de la curva por un plano normal (según la dirección (du, dv) del plano tangente) se tiene que $\theta = 0$.

$$\Rightarrow \cos(\theta) = 1$$

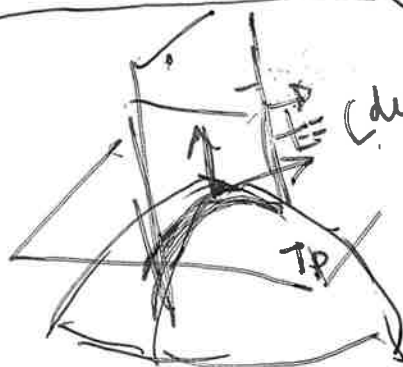


En las secciones normales
 $\vec{n} = \vec{N}$
 $\vec{t} = (du, dv)$

de modo que la curvatura normal es

$$k_n = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)}$$

para el plano normal que se interseca con el plano tangente en la dirección $\vec{t} = (du, dv)$



(tangente de la curva) de intersección del plano con la superficie

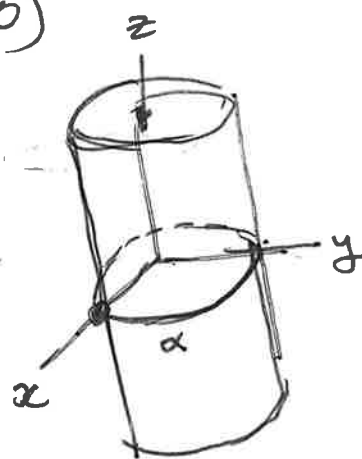
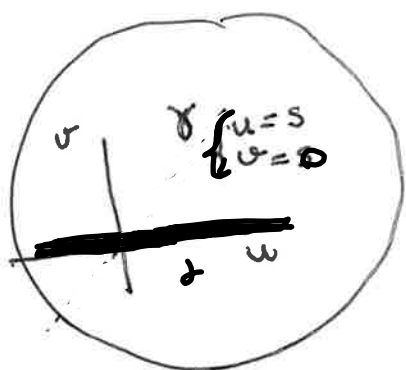
Ejemplo (pag 194)

Sea el cilindro dado por

$$\vec{x}(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$

Consideremos la circunferencia dada por

$$\vec{\alpha}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$$



$$\alpha = \vec{x}(s)$$

Calcular los vectores de curvatura normal y la curvatura geodésica de la curva α en el punto $\vec{\alpha}(0) = (1, 0, 0) = \vec{x}(0,0)$

En nuestro caso

$$\vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0) \rightarrow \vec{x}_u(0,0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{x}_v = (0, 0, 1) \rightarrow \vec{x}_v(0,0) = (0, 0, 1)$$

El plano tangente es $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$
el vector ortogonal del plano tangente

$$N = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{(-\sin(u), \cos(u), 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\sin(u), \cos(u), 0) \times (0, 0, 1)\|} =$$

$$= (\cos(u), \sin(u), 0)$$

$$\vec{N}(0,0) = (\cos(0), \sin(0), 0) = (1, 0, 0)$$

coincide con hacerlo con el caso particular directamente

$$\vec{N}(0,0) = (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0)$$

Calculamos ahora el vector de curvatura de varias maneras.

1) Calculamos el vector tangente de α

$$\vec{T} = \frac{d}{ds} (\cos(s), \sin(s), 0) = (-\sin(s), \cos(s), 0)$$

Calculamos el vector de curvatura

$$\vec{K} = \frac{d}{ds} \vec{T} = \frac{d}{ds} (-\sin(s), \cos(s), 0) = (-\cos(s), -\sin(s), 0)$$

para $s=0$

$$\vec{K}(0) = (-1, 0, 0)$$

Si ahora descomponemos

$$\vec{K}(0) = \underbrace{(-1, 0, 0)}_{\text{en la dirección de } \vec{N}} + \underbrace{(0, 0, 0)}_{\text{pertenece al plano tangente}}$$

$$\vec{K} = K_n + K_g \Rightarrow \begin{cases} K_n = (-1, 0, 0) \\ K_g = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Curvatura normal $K_n = \|(-1, 0, 0)\| = 1$
 $K_g = \|(0, 0, 0)\| = 0$

Direcciones asintóticas

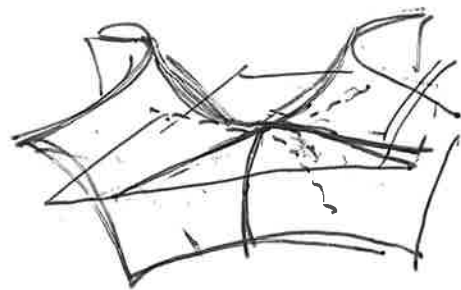
(6)

Son las direcciones en las que la curvatura normal es cero (la curva está en el plano tangente)

Es decir, son las soluciones

$$\text{de } \chi_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{II}(du, dv) = 0$$



$$\Rightarrow l du^2 + 2f du dv + g dv^2 = 0$$

$$\Rightarrow l + 2f \left(\frac{dv}{du}\right) + g \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

Direcciones principales

Los valores máximo y mínimo de las curvaturas normales se llaman curvaturas principales

K_1 y K_2

El máximo y el mínimo de χ_n se obtiene haciendo $\frac{\partial}{\partial u} \chi_n = 0$ $\frac{\partial}{\partial v} \chi_n = 0$

$$\begin{vmatrix} (dg)^2 - du dv & (dn)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

Si la curvatura normal en la dirección ($h=du$, $k=dv$)
 $\chi_n(h, k) = \frac{e h^2 + 2f h k + g k^2}{E h^2 + 2F h k + G k^2} = \frac{II(h, k)}{I(h, k)}$

Los extremos verifican

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi_n}{\partial h} = \frac{I(h, k) (2eh + 2fk) - II(h, k) (2Eh + 2Fk)}{I(h, k)^2} = 0 \\ \frac{\partial \chi_n}{\partial k} = \frac{I(h, k) (2fh + 2gk) - II(h, k) (2Fh + 2Gk)}{I(h, k)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2eh + 2fk) - \chi_n(h, k) (2Eh + 2Fk) = 0 \\ (2fh + 2gk) - \chi_n(h, k) (2Fh + 2Gk) = 0 \end{cases}$$

Si suponemos que $\chi_n(h, k) \neq 0$, eliminándolos en ambas ecuaciones

$$\frac{2eh + 2fk}{2Eh + 2Fk} = \frac{2fh + 2gk}{2Fh + 2Gk} = \chi_n$$

$$\begin{aligned} (2eh + 2fk)(2Fh + 2Gk) - (2fh + 2gk)(2Eh + 2Fk) &= 0 \\ (eh + fk)(Fh + Gk) - (fh + gk)(Eh + Fk) &= 0 \end{aligned}$$

$$(eF - fE)k^2 + (eG + fF - gE)hk + (fG - gF)k^2 = 0 \quad (2)$$

$$(fE - eF)du^2 + (gE - eG)dudv + (Fg - Gf)dv^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 - dudv & (du)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

[dividiendo por $(du)^2$]

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)\frac{dv}{du} + (Fg - Gf)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

Ecuaciones de las direcciones principales

los puntos en los que

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \text{cte}$$

Se llaman puntos umbilicos

(todas las direcciones pueden considerarse principales $K_m = \text{cte} \Rightarrow K_1 = K_2$)



en la esfera
todos los
puntos
son umbilicos

Teorema En cada punto, no umbilico, (9)
 las dos direcciones principales son perpendiculares

Demostración

Si una dirección principal es (du, dv) , la pendiente $\frac{dv}{du} = \mu$ verifica

$$(Eg - Fe) + (Eg - Ge)\mu + (Fg - Gf)\mu^2 = 0 \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Dos direcciones $(1, \mu_1)$, $(1, \mu_2)$ son
 perpendiculares con la métrica del
 plano tangente si su producto escalar es 0

$$(1, \mu_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(E + \mu_1 F, F + \mu_1 G) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = E + \mu_1 F + F\mu_2 + \mu_1\mu_2 G = 0$$

$$E + F\mu_1 + F\mu_2 + G\mu_1\mu_2 = 0$$

$$E + F(\mu_1 + \mu_2) + G(\mu_1\mu_2) = 0 \quad (**)$$

Las direcciones principales $(1, \mu)$ son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado (*)

La suma de las soluciones es

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{Ge - Ef}{Fg - Gf}$$

En una ec de segundo grado
 $ax^2 + bx + c = 0$
 $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
 $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

El producto de las soluciones es

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{Ef - Fe}{Fg - Gf}$$

Estos valores verifican la condición (**)
de ortogonalidad

En efecto,

(11)

$$E + F \left(\frac{Ge - Eg}{Fg - Gf} \right) + G \left(\frac{Ef - Fe}{Fg - Gf} \right) =$$

$$= \frac{E(Fg - Gf) + F(Ge - Eg) + G(Ef - Fe)}{FN - GM} =$$

$$= \frac{\cancel{EFg} - E\overset{x}{G}f + F\overset{x}{G}e - \cancel{FEG} + G\overset{x}{E}f - G\overset{x}{F}e}{Fg - Gf} = 0$$

El producto de las curvaturas principales
se llama CURVATURA TOTAL o de GAUSS

$$K_t = K_1 \cdot K_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

La media de las curvaturas principales
se llama CURVATURA MEDIA

$$K_m = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{eg - 2ff + Ge}{2(EG - F^2)}$$

Ecuación de las curvaturas principales (12)

En las ecuaciones de las curvaturas normales *

$$\begin{cases} e h + f k - K_n(h, k) (Eh + Fk) = 0 \\ f h + g k - K_n(h, k) (Fh + Gk) = 0 \end{cases}$$

si consideramos la dirección $(1, \mu)$

$$\begin{cases} (e + f \mu) - K_n (E + F \mu) = 0 \\ (f + g \mu) - K_n (F + G \mu) = 0 \end{cases}$$

Eliminando μ

$$\begin{cases} e + f \mu - K_n E - K_n F \mu = 0 \\ f + g \mu - K_n F - K_n G \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(f - K_n F) = K_n E - e \\ \mu(g - K_n G) = K_n F - f \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{K_n E - e}{f - K_n F} = \frac{K_n F - f}{g - K_n G} \Rightarrow (K_n E - e)(g - K_n G) = (f - K_n F)(K_n F - f)$$

$$(-EG + F^2) K_n^2 + (Eg + Ge - Ff - Ff) K_n + (-eG + f^2) = 0$$

$$(EG - F^2) K_n = (Eg + Ge - 2Ff) K_n + (eg - f^2) = 0 \quad (*)$$

de esta ecuación de 2º grado se deduce una expresión para K_n y K_m

Otra forma

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} K^2 - \left\{ \begin{vmatrix} E & f \\ f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e & F \\ f & G \end{vmatrix} \right\} K + \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = 0$$

De la relación que hay entre la suma y el producto de las raíces K_1 y K_2 de esta ecuación se obtiene que

$$X_z = K_1 \cdot K_2 = \frac{e'g - f^2}{EG - F^2}$$

$$X_m = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}$$

curvatura de Gauss (o total)

$$K_x = K_1 \cdot K_2$$

Es una característica que define la superficie.

Dos superficies con distinta curvatura total no pueden adaptarse una a otra sin romperse o estirarse.

Por ejemplo un plano y un cilindro pueden adaptarse uno a otro, pero no un plano y una esfera.

O una esfera o otra de distinto tamaño.

En la geometría intrínseca son muy importantes las superficies que tienen la misma curvatura total en todos sus puntos. Esto da origen a las geometrías no-euclídeas.

Teorema egregio de Gauss: La curvatura gaussiana puede determinarse por completo midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie. Es decir la curvatura total es un invariante intrínseco de la superficie (la curvatura gaussiana es invariante bajo isometrías locales).

La propiedad más notable de la curvatura de Gauss (propiedad que explica su gran significado en la teoría de superficies) es la siguiente. Supongamos que la superficie es de un material flexible pero inextensible — por ejempo una hoja delgada de estaño — de modo que podemos cambiarla de distintas formas sin estirarla ni romperla. Durante este proceso las curvaturas principales cambiarán, como ~~probo~~ Gauss, pero el producto $K_1 \cdot K_2$ permanecerá invariable en cada punto. Este resultado fundamental prueba que dos superficies con diferentes curvaturas de Gauss son inherentemente distintas entre sí, ... consistiendo esa diferencia en el hecho de que si las deformamos de todas las formas posibles, sin estirarlas ni romperlas, nunca podemos superponer una sobre otra. Por ejemplo, un segmento de la superficie de una esfera nunca podrá deformarse de tal forma que se adapte a un plano o la superficie de una esfera a otra de distinto radio.

Curvatura media

$$K_m = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

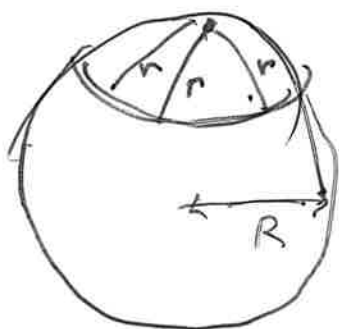
La característica que define las superficies mínimas (pompas de jabón) es que en todos sus puntos la curvatura media es cero

Intuitivamente en las superficies mínimas la suma de tensiones superficiales en todas las direcciones suman cero

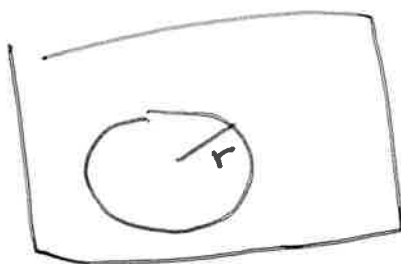
Geometría Intrínseca

(15)

Son las propiedades geométricas que sólo dependen de las medidas de longitud



En una esfera
 $S(r) = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$



En un plano
 la longitud de
 una circunferencia
 es $S(r) = 2\pi r$

En un cilindro y un plano



~~tienen~~ la misma geometría intrínseca

Las superficies equivalentes a un plano ($K_g = 0$)
 Son las superficies "desarrollables" que
 son envolventes de planos (cilindros, conos, etc.)
 hiperboloide, las regladas, ---) (banda de Möbius)

