ECUACIONES DIFERENCIALES

PEC 2023

allave@madrid.uned.es

Ecuaciones Diferenciales
(Prueba de evaluación Continua)

-INSTRUCCIONES

- El examen consta de tres preguntas con varios apartados.
- Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas y se valorará la presentación.
- Se deben entregar las respuestas en un único fichero pdf. La prueba se entrega a través del curso virtual.

-ENUNCIADO

Pregunta 1 (4 puntos)

(a) (1 punto) Compruebe, sin calcular la solución, que existe solución única local para el problema de valor inicial

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}, \quad y(1) = 1.$$

(b) (1 punto) Estudie si la ecuación

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}$$

es de variables separables, exacta, lineal o de Bernoulli.

(c) (2 puntos) ¿Puede verificar la solución del problema de valor inicial del primer apartado que $y(2) = -1$?

Pregunta 2 (3 puntos)

(a) (1 punto) $\{e^x, e^{2x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal. Encuentre tal ecuación.

(b) (1 punto) $\{e^x, (x+1)e^x\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal. Encuentre tal ecuación.

(c) (1 punto) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - (\pi + 1)y' - \pi y = t + e^{-\pi t}.$$

Pregunta 3 (3 puntos)

(a) (1 punto) Calcule la transformada de Laplace de las funciones dadas por $f(t) = (1 + e^{3t})^2$ y $g(t) = (t+1)^3$.

(b) (2 puntos) Resuelva el problema de valor inicial siguiente utilizando la transformada de Laplace y por otro método a su elección

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Tabla transformadas de Laplace

$f(x)$	$\mathcal{L}[f](s)$
e^{ax}, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(bx)$, $b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bx)$, $b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$x^n f(x)$, $n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{ax} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $n \in \mathbb{N}$	$s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-1}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^x f(r)dr$	$\frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}$
$\frac{f(x)}{x}$	$\int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f](r)dr$
$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-r)g(r)dr$	$\mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$

Ecuaciones Diferenciales
(Prueba de evaluación continua)

-INSTRUCCIONES

- El examen consta de tres preguntas con varios apartados.
- Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas y se valorará la presentación.
- Se deben entregar las respuestas en un único fichero pdf. La prueba se entrega a través del curso virtual.

-ENUNCIADO

Pregunta 1 (4 puntos)

(a) (1 punto) Compruebe, sin calcular la solución, que existe solución única local para el problema de valor inicial

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}, \quad y(1) = 1.$$

(b) (1 punto) Estudie si la ecuación

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}$$

es de variables separables, exacta, lineal o de Bernoulli.

(c) (2 puntos) ¿Puede verificar la solución del problema de valor inicial del primer apartado que $y(2) = -1$?

Solución:

(a) Para resolver el primer apartado utilizamos el teorema sobre existencia y unicidad de solución para el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

En nuestro caso

$$f(x, y) = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}, \quad x_0 = 1, \quad \text{e} \quad y_0 = 1.$$

Para poder aplicar el teorema necesitamos que nuestra función f sea continua y tenga derivada parcial con respecto a la variable y continua en un dominio que contenga al punto $(1, 1)$. Podemos tomar como ese dominio un disco centrado en $(1, 1)$. Si ese disco es suficientemente pequeño, entonces no tocará al eje x (es decir, todos los puntos del disco tendrán segunda componente distinta de 0). Por lo tanto, la función restringida a ese disco que no toca al eje x está bien definida, es continua y tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden porque es el cociente de funciones polinómicas y el denominador no se anula. Así que se dan las condiciones suficientes para la existencia de solución local del problema.

(b) Para que la ecuación fuese de variables separables tendría que ser de la forma $y' = G(x)H(y)$ y no es el caso. Para que la ecuación fuese exacta la derivada parcial con respecto a x de la función dada por $M(x, y) = y^2$ debe ser igual a la derivada con respecto a y de la función dada por $N(x, y) = 3y^3 + x + 5$. Algo que no ocurre,

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, y) = 0 \neq 9y^2 = \frac{\partial N}{\partial y}(x, y).$$

Finalmente, para que la ecuación fuese lineal tendría que ser de la forma $y' + p(x)y = q(x)$, pero en nuestra ecuación se tiene $y' - 3y = \frac{x+5}{y^2}$ y por lo tanto es de Bernoulli.

(c) Para responder al tercer apartado vamos a calcular la solución del problema del primer apartado para comprobar si verifica que $y(2) = -1$. Como sabemos que la ecuación es de Bernoulli, utilizamos el cambio $z = y^3$ para transformar la ecuación en una ecuación lineal.

Con ese cambio se tiene que $z' = 3y^2y'$ y sustituyendo obtenemos

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{3y^2} = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2} \quad \Rightarrow \quad z' = 9y^3 + 3x + 15$$
$$\Rightarrow \quad z' - 9z = 3x + 15.$$

Para resolver la ecuación $z' - 9z = 3x + 15$ multiplicamos ambos miembros por e^{-9x}, lo que nos lleva a la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z\mathrm{e}^{-9x}) = \mathrm{e}^{-9x}(3x + 15),$$

e integrando por partes resulta

$$z\mathrm{e}^{-9x} = -\frac{(3x + 15)\ \mathrm{e}^{-9x}}{9} - \frac{\mathrm{e}^{-9x}}{27} + C,$$

o lo que es lo mismo

$$z(x) = -\frac{(9x + 46)}{27} + C\mathrm{e}^{9x}. = -\frac{x}{3} - \frac{46}{27} + Ce^{9x}$$

Nos queda deshacer el cambio para llegar a que la solución de la ecuación original viene dada por

$$y(x)^3 = -\frac{(9x + 46)}{27} + C\mathrm{e}^{9x}.$$

El valor de C se calcula imponiendo la condición inicial, $y(0) = 1$, $\boxed{y(1)=1}$

línea −9

$$1^3 = -\frac{46}{27} + C \Leftrightarrow C = \frac{73}{27}.$$

Ahora sabemos que la solución viene dada por

$$y(x)^3 = -\frac{(9x + 46)}{27} + \frac{73}{27}\mathrm{e}^{9x}.$$

Así que si esa solución verificase $y(2) = -1$, tendríamos que tener

$$-1 = -\frac{64}{27} + \frac{73}{27}\mathrm{e},$$

lo cual es imposible ya que $-\frac{64}{27} + \frac{73}{27}\mathrm{e} > -\frac{64}{27} + \frac{73}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} > 0$.

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial no puede verificar la condición que establece el enunciado c).

Pregunta 2 (3 puntos)

(a) (1 punto) $\{e^x, e^{2x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal. Encuentre tal ecuación.

(b) (1 punto) $\{e^x, (x+1)e^x\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal. Encuentre tal ecuación.

(c) (1 punto) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - (\pi + 1)y' - \pi y = t + e^{-\pi t}.$$

Solución:

(a) Podemos resolverlo de dos formas distintas. La primera recordando que si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un solución de la ecuación característica de una ecuación lineal, entonces la función dada por $e^{\alpha x}$ es solución de esa ecuación lineal. Por lo tanto, una ecuación con polinomio característico

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2,$$

es decir, $y'' - 3y' + 2y = 0$, tendrá como sistema fundamental de soluciones a $\{e^x, e^{2x}\}$ que es el que se indica en el enunciado.

La segunda forma es utilizar que cualquier solución de la ecuación será de la forma

$$y(x) = Ce^x + De^{2x} \tag{1}$$

con $C, D \in \mathbb{R}$. Al derivar con respecto a x se obtiene que

$$y'(x) = Ce^x + 2De^{2x},$$

$$y''(x) = Ce^x + 4De^{2x}.$$

Y ese último sistema de ecuaciones se puede resolver con respecto a C y D para obtener que $2D = (y'' - y')e^{-2x}$ y $C = (2y' - y'')e^{2x}$. Si ahora sustituimos esas expresiones de C y D en (1) resulta

$$y(x) = (2y' - y'') + (y'' - y')/2$$

y operando llegamos a que y verifica la ecuación lineal

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

(b) El segundo método utilizado en el apartado anterior lleva a la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$. Compruébelo.

Para aplicar el primer método utilizamos que cualquier combinación lineal de las soluciones dadas por e^x y $(x+1)e^x$ también es solución de la ecuación. En particular, xe^x (que se consigue restando e^x de $(x+1)e^x$) es solución de la ecuación que buscamos y $\{e^x, xe^x\}$ también es un sistema fundamental de soluciones.

Así que sabemos que e^x y xe^x son soluciones y que un sistema fundamental de soluciones está formado por dos elementos. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una solución doble de la ecuación característica de una ecuación lineal, entonces $e^{\alpha x}$ y $xe^{\alpha x}$ son soluciones (linealmente independientes) de esa ecuación lineal y forma un sistema fundamental de soluciones. Por lo tanto, una ecuación con polinomio característico

$$(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1,$$

es decir, $y'' - 2y' + y = 0$, tendrá como sistema fundamental de soluciones a $\{e^x, xe^x\}$.

(c) Para que las cuentas sean más sencillas, vamos a calcular una solución de

$$y'' - (\pi + 1)y' - \pi y = t, \tag{2}$$

y otra de

$$y'' - (\pi + 1)y' - \pi y = e^{-\pi t}. \tag{3}$$

Su suma, por el principio de superposición, es solución de

$$y'' - (\pi + 1)y' - \pi y = t + e^{-\pi t}.$$

Para encontrar una solución de la ecuación (2) probamos con $y(t) = At + B$. Puesto que $y'(t) = A$ y $y''(t) = 0$, al sustituir en la ecuación (2) resulta

$$\begin{aligned} 0 - (\pi + 1)A - \pi(At + B) = t \quad &\Leftrightarrow \quad (A\pi + 1)t + (\pi B + (\pi + 1)A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A\pi + 1 = 0,\ \pi B + (\pi + 1)A = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A = -1/\pi,\ B = (\pi + 1)/\pi^2. \end{aligned}$$

Y llegamos a que la primera solución buscada es $y_1(t) = -\frac{1}{\pi}t + \frac{\pi+1}{\pi^2}$.

Para encontrar una solución de la ecuación (3) probamos con $y(t) = Ae^{-\pi t}$. Puesto que $y'(t) = -A\pi e^{-\pi t}$ y $y''(t) = A\pi^2 e^{-\pi t}$, al sustituir en la ecuación (3) resulta

$$A\pi^2 e^{-\pi t} + (\pi + 1)A\pi e^{-\pi t} - A\pi e^{-\pi t} = e^{-\pi t} \quad \Leftrightarrow \quad 2A\pi^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2\pi^2}.$$

Y llegamos a que la segunda solución buscada es $y_2(t) = \frac{1}{2\pi^2}e^{-\pi t}$.

Ahora, como ya anunciamos, utilizamos el principio de superposición para concluir que $y_1(t) + y_2(t) = -\frac{1}{\pi}t + \frac{\pi+1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}e^{-\pi t}$ es una solución particular de la ecuación del enunciado.

Pregunta 3 (3 puntos)

(a) (1 punto) Calcule la transformada de Laplace de las funciones dadas por $f(t) = (1 + e^{3t})^2$ y $g(t) = (t + 1)^3$.

(b) (2 puntos) Resuelva el problema de valor inicial siguiente utilizando la transformada de Laplace y por otro método a su elección

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Solución:

(a) En primer lugar fijémonos en que

$$f(t) = (1 + e^{3t})^2 = 1 + 2e^{3t} + e^{6t}.$$

Por lo tanto, de la linealidad de la transformada de Laplace resulta que

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[1](s) + 2\mathcal{L}[e^{3t}](s) + \mathcal{L}[e^{6t}](s).$$

Ahora, usando la tabla de transformadas, obtenemos

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s-6}.$$

Por otro lado, para calcular $\mathcal{L}[g(t)](s)$ usamos que

$$g(t) = (t+1)^3 = (t+1)(t^2+2t+1) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1.$$

Por lo tanto, de la linealidad de la transformada de Laplace resulta que

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \mathcal{L}[t^3](s) + 3\mathcal{L}[t^2](s) + 3\mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[1](s).$$

Y con ayuda de la tabla de transformadas obtenemos

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

(b) Aplicamos la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial del enunciado y utilizamos que esa transformada es lineal para obtener que

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y](s) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-4t}](s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[y''](s) - 3\mathcal{L}[y'(t)](s) + 2\mathcal{L}[y(t)](s) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-4t}](s).$$

De la tabla de transformadas se obtiene ahora que

$$s^2\mathcal{L}[y(t)](s) - sy(0) - y'(0) - 3(s\mathcal{L}[y(t)](s) - y(0)) + 2\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{s+4},$$

y tras agrupar que

$$(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}[y(t)](s) + (3-s)y(0) - y'(0) = \frac{1}{s+4}.$$

Como las condiciones iniciales establecen que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 3$, sustituimos esos valores para llegar a

$$(s^2-3s+2)\mathcal{L}[y(t)](s)+(3-s)-3 = \frac{1}{s+4} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1}{(s+4)(s^2-3s+2)} + \frac{s}{s^2-3s+2}.$$

Para finalizar necesitamos expresar $\frac{1}{(s+4)(s^2-3s+2)} + \frac{s}{s^2-3s+2}$ de forma que sepamos calcular su transformada inversa. Con ese objetivo factorizamos $s^2 - 3s + 2$ como $(s-2)(s-1)$ para descomponer las dos fracciones en fracciones simples. Imponemos que

$$\frac{1}{(s+4)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1},$$

y

$$\frac{s}{(s-2)(s-1)} = \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s-1}.$$

Operando e igualando numeradores resulta que

$$1 = A(s-2)(s-1) + B(s+4)(s-1) + C(s+4)(s-2)$$

y

$$s = D(s-1) + E(s-2).$$

Dando valores a s (1, 2 y -4) obtenemos que $A = \frac{1}{30}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = \frac{-1}{5}$, $D = 2$ y $E = -1$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \frac{1/30}{s+4} + \frac{13/6}{s-2} + \frac{-6/5}{s-1}$$

y la solución buscada es
$$y(t) = \frac{1}{30}e^{-4t} + \frac{13}{6}e^{2t} + \frac{-6}{5}e^{t}.$$

La resolución por otro método puede ser la siguiente. El polinomio característico de la ecuación homogénea es $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ y tiene por raíces a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Por lo tanto, la solución buscada es de la forma
$$y(t) = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + y_p(t),$$
en donde y_p es una solución particular de la ecuación. Para encontrar esa solución particular utilizamos el método de selección y probamos con Ae^{-4t}. Al sustituir esa solución en la ecuación resulta
$$16Ae^{-4t} + 12Ae^{-4t} + 2Ae^{-4t} = e^{-4t} \Leftrightarrow (30A-1)e^{-4t} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{30}.$$

Ahora que ya sabemos que $y_p(t) = \frac{1}{30}e^{-4t}$ imponemos las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 3$
$$C_1e^{0} + C_2e^{2\cdot 0} + \frac{1}{30}e^{-4\cdot 0} = 1$$
$$C_1e^{0} + 2C_2e^{2\cdot 0} + \frac{-4}{30}e^{-4\cdot 0} = 3$$
y llegamos a
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{29}{30} \\ C_1 + 2C_2 = \frac{94}{30} \end{cases} \Leftrightarrow C_2 = \frac{94-29}{30} = \frac{13}{6} \text{ y } C_1 = \frac{-6}{5}.$$

Por lo tanto, la solución buscada es
$$y(t) = \frac{-6}{5}e^{t} + \frac{13}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Tabla transformadas de Laplace

$f(x)$	$\mathcal{L}[f](s)$
e^{ax}, $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(bx)$, $b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bx)$, $b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$x^n f(x)$, $n \in \mathbb{N}$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)$
$e^{ax} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $n \in \mathbb{N}$	$s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^x f(r)dr$	$\frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}$
$\frac{f(x)}{x}$	$\int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f](r)dr$
$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-r)g(r)dr$	$\mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s)$

1 (a) Compruebe, sin calcular la solución, que existe una solución única local para el problema de valor inicial

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}, \quad y(1) = 1$$

(b) Estudie si la ecuación

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}$$

es de variables separables, exacta, lineal o de Bernoulli

(c) ¿Puede verificar la solución de valor inicial del primer apartado que $y(2) = -1$?

(a) Se trata de una ecuación ~~de~~ primer orden explícita, con una condición inicial

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

Las condiciones suficientes del teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy (ver pág 6 de libro de texto) son

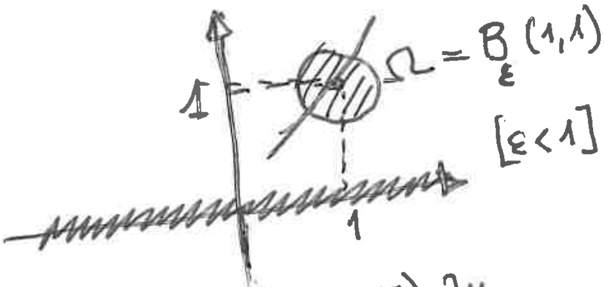
1) f es continua en Ω

2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en Ω

En nuestro caso

$$f(x,y) = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}$$

deja de ser continua cuando $y=0$. Por tanto, f es continua en un entorno del punto $(1,1)$ suficientemente pequeño f es continua



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{y}\left(\frac{3y^3+x+5}{y^2}\right) = \frac{9y^2 \cdot y^2 - (3y^3+x+5)\cdot 2y}{y^4} =$$

$$= 9 - \frac{2(3y^3+x+5)}{y^3} = 9 - 6 + \frac{2x}{y^3} - \frac{10}{y^3} =$$

$$= 3 - \frac{2(x+5)}{y^3}$$

Esta función también es continua, salvo cuando $y=0$. Por tanto, es continua en Ω y cumple las condiciones del TEU y nos garantiz que por $(1,1)$ pasa una y solo una solución del problema de Cauchy

(b) (1) ¿Es de variables separables? (pág 23)

$y = f(x,y)$ **no** es de variables separables ya que $f(x,y)$ no se puede descomponer como

$$f(x,y) = F(x) \cdot G(y)$$

(2) ¿Es una diferencial exacta? (pág 28)

Si escribimos la ecuación en forma de diferencial total

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^3+x+5}{y^2}$$

$$y^2\,dy = (3y^3+x+5)\,dx$$

$$\underbrace{[3y^3+x+5]}_{P(x)}\,dx + \underbrace{[-y^2]}_{Q(x)}\,dy = 0$$

La condición para que sea una diferencial exacta es que exista una función potencial $\Phi(x,y)$ tal que

$$¿\,d\Phi = P\,dx + Q\,dy\,? \Rightarrow ¿\,P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\ ;\ Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,?$$

$$¿\,\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,?$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 9y^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

No es una diferencial exacta.

(3) ¿Es una ecuación de Bernoulli? (pág 36)

$$y' = \frac{3y^3 + x + 5}{y^2}$$

$y' + f(x)y + g(x)y^n = 0$
Ecuaciones tipo Bernoulli

$$y^2 y' = 3y^3 + x + 5$$

$$y' = 3y + (x+5) \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$y' - 3y - (x+5)\frac{1}{y^2} = 0$$

Sí es de Bernoulli.

Si escribimos la ecuación de esta forma

$$y^2 y' = 3y^3 + x + 5 \quad [1]$$

Hacemos el cambio

$$\begin{cases} u = y^3 \\ \dfrac{du}{dx} = 3y^2 \dfrac{dy}{dx} \end{cases}$$

Ajustando la ecuación [1] y haciendo el cambio

$$3y^2 y' = 9y^3 + 3x + 15$$

$$\frac{du}{dx} = 9u + 3x + 15$$

Esta es una ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} - 9u = 3x + 15$$

1) Resolvemos la ecuación homogénea (que es de variables separables)

$$\frac{du}{dx} - 9u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = 9u \quad ; \quad \frac{1}{u}\, du = 9\, dx$$

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int 9\, dx$$

$$\ln(u) = 9x + C$$

$$u_H = C e^{9x}$$

2) Buscamos una solución particular de la completa, ensayando

$$u_p = Ax + B \; ; \; u_p' = A$$

$$A - 9(Ax + B) = 3x + 15$$

$$-9Ax + (A - 9B) = 3x + 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9A = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{3} \\ A - 9B = 15 \Rightarrow -\frac{1}{3} - 15 = 9B \Rightarrow B = -\frac{46}{27} \end{cases}$$

$$u_p = -\frac{x}{3} - \frac{46}{27}$$

La solución de la ecuación

$$u = u_H + u_p$$

$$u = Ce^{9x} - \frac{x}{3} - \frac{46}{27}$$

Deshaciendo el cambio $u = y^3$

$$\boxed{y^3 = Ce^{9x} - \frac{x}{3} - \frac{46}{27}}$$

~~Im~~aciendo $y(1)=1$, determinamos C

$$1 = Ce^{9} - \frac{1}{3} - \frac{46}{27}$$

$$Ce^{9} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{46}{27} \; ; \; Ce^{9} = \frac{82}{27} \; ; \; \boxed{C = \frac{82}{27e^{9}}}$$

$C \approx 0{,}00037480014$

(c) Para responder a este apartado podemos hacer un argumento de tipo cualitativo.

La función y solución del problema de Cauchy del primer apartado es una función creciente para $x=1$. (Podemos hacer un dibujo aproximado usando poligonal de Euler)

si $y'=1$ la función y es creciente

También podemos considerar que. $\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^3+x+5}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2}$ siempre es positivo.

Luego la función $f(x,y) = y'$ siempre crece conforme avanza en x de 1 hacia 2.

(3)

Por consiguiente, $y(2)$ tiene que ser mayor que $y(1) = 1$.

Por consiguiente,

$y(2) > y(1) = 1$

y resulta imposible que $y(2) = -1$

De otra manera (cuantitativa)

En la solucion explícita hallada para $x=2$

$$y^3 = C e^{9x} - \frac{x}{3} - \frac{46}{27}$$

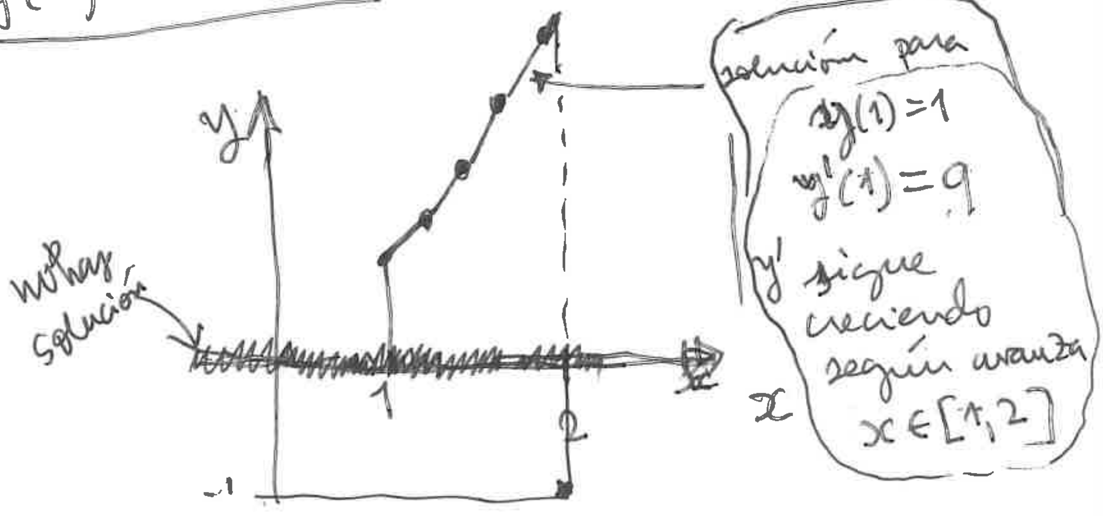
$$y^3 = C e^{18} - \frac{2}{3} - \frac{46}{27}$$

$$y^3 = \frac{82}{27 e^9} e^{18} - \frac{2}{3} - \frac{46}{27}$$

$$y^3 \approx 24\ 606$$

$$y \approx 29,08$$

$$\underline{y(2) = 29,08 \neq -1}$$



2

(a) $\{e^x, e^{2x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal. Encuentre tal ecuación.

(b) $\{e^x, (x+1)e^x\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación lineal. Encuentre tal ecuación

(c) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - (\pi+1)y' - \pi y = t + e^{-\pi t}$$

Vamos a hacer el problema de dos formas

a) 1) Si $\{e^x, e^{2x}\}$ es un sistema de soluciones fundamentales, resulta que $m=1$ y $m=2$ son dos raíces simples del polinomio característico. Así pues,

$$p(m) = (m-1)(m-2) = m^2 - 3m + 2$$

La ecuación es:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

2) De otra manera es considerar que el Wronskiano

$$W(y, y_1, y_2) = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & e^x & e^{2x} \\ y' & e^x & 2e^{2x} \\ y'' & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^x e^{2x}}_{\neq 0} \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 1 & 2 \\ y'' & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 1 & 2 \\ y'' & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2y - 3y' + y'' = 0$$

$$\boxed{y'' - 3y' + 2y = 0}$$

que coincide con el resultado obtenido de la primera forma.

2) El sistema $\{e^x, (1+x)e^x\}$ es equivalente a $\{e^x, e^x, xe^x\}$ = equivalente a $\{e^x, xe^x\}$

Este sistema significa que el polinomio característico tiene $m = 1$ como raíz doble

Por tanto,

$$p(m) = (m-1)^2 = m^2 - 2m + 1$$

Por consiguiente la ecuación es

$$(D^2 - 2D + 1)\, y = 0$$

$$\boxed{y'' - 2y' + y = 0}$$

De otra manera, usando el wronskiano

$$W(y, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

$$W = \begin{vmatrix} y & e^x & (x+1)e^x \\ y' & e^x & e^x + (x+1)e^x \\ y'' & e^x & e^x + e^x + (x+1)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^x e^x}_{\neq 0} \begin{vmatrix} y & 1 & x+1 \\ y' & 1 & 1+x+1 \\ y'' & 1 & 1+1+x+1 \end{vmatrix} = \underbrace{e^{2x}}_{\neq 0} \begin{vmatrix} y & 1 & x+1 \\ y' & 1 & x+2 \\ y'' & 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & 1 & x+1 \\ y' & 1 & x+2 \\ y'' & 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$y(x+3-x-2) - y'(x+3-x-1) + y''(x+2-x-1) = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$ (que es igual que lo anterior)

(c) Para hallar una solución particular de la ecuación lineal

$$y'' - (r+1)y' - ry = t + e^{-rt}$$

usaremos el principio de superposición

1) Buscamos una solución particular de

$$y'' - (r+1)y' - ry = t$$

ensayamos $y_1 = At+B$; $y_1' = A$; $y_1'' = 0$

$$0 - (r+1)A - r(At+B) = t$$

$$\begin{cases} -Ar - A - Br = 0 \\ -rA = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{r} \\ B = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \end{cases}$$

La solución particular y_1 es

$$y_1 = -\frac{t}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}$$

2) Buscamos una solución particular de

$$y'' - (r+1)y' - ry = e^{-rt}$$

ensayamos $y_2 = Ae^{-rt}$; $y_2' = -rAe^{-rt}$; $y_2'' = r^2Ae^{-rt}$

Sustituyendo en la ecuación

$$r^2Ae^{-rt} + (r+1)rAe^{-rt} - rAe^{-rt} = e^{-rt}$$

$$\Rightarrow r\left[rA + (r+1)A - A\right] = 1$$

$$r\left[2rA + \cancel{A} - \cancel{A}\right] = 1;$$

$$2r^2 A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2r^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2r^2} e^{-rt}$$

3) La solución particular de

$$y'' - (r+1)y' - ry = t + e^{-rt}$$

es $y_1 + y_2$

$$\boxed{y_p = \underbrace{-\frac{t}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}}_{y_1} + \underbrace{\frac{1}{2r^2} e^{-rt}}_{y_2}}$$

$$= -\frac{t}{r} + \frac{r+1}{r^2} + \frac{1}{2r^2} e^{-rt}$$

3 (a) Calcule la transformada de Laplace de las funciones dadas por

$$f(t) = (1+e^{3t})^2 \quad y$$

$$g(t) = (t+1)^3$$

(b) Resuelva el problema de valor inicial siguiente utilizando la transformada de Laplace

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-4t} \\ y(0) = 1 \ ; \ y'(0) = 3 \end{cases}$$

(a) 1 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) =$

$$\mathcal{L}[(1+e^{3t})^2] = \mathcal{L}(1+2e^{3t}+e^{6t}) =$$

Usar "Wolfram Alpha" "Laplace transform"

$$= \boxed{\frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} + \frac{1}{s-6}} =$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

$$= \frac{4s^2 - 24s + 18}{s(s-3)(s-6)} = \frac{2(2s^2-12s+9)}{s(s-3)(s-6)}$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

2 $\mathcal{L}[g(t)] = G(s) =$

$$= \mathcal{L}[(t+1)^3] = \mathcal{L}[t^3 + 3t^2 + 3t + 1] =$$

$$= \boxed{\frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}} = \frac{s^3+3s^2+6s+6}{s^4}$$

$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$

$\mathcal{L}[t^3] = \frac{6}{s^4}$

...

$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$$\mathcal{L}[y'] = sY - y(0)$$
$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

(b)

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

$$\underbrace{s^2Y - s - 3}_{y''} - 3\underbrace{[sY - 1]}_{y'} + 2Y = \frac{1}{s+4}$$

$$[s^2 - 3s + 2]\,Y + [-s - 3 + 3] = \frac{1}{s+4}$$

$$[s^2 - 3s + 2]\,Y = \frac{1}{s+4} + s$$

$$[s^2 - 3s + 2]\,Y = \frac{1 + s^2 + 4s}{s+4}$$

$$s^2 - 3s + 2 = (s-2)(s-1)$$

$$Y = \frac{s^2 + 4s + 1}{(s+4)(s-2)(s-1)}$$

Descomponemos esta fracción en fracciones elementales

$$\frac{s^2 + 4s + 1}{(s+4)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} =$$

$$= \frac{A(s-1)(s-2) + B(s+4)(s-1) + C(s+4)(s-2)}{(s+4)(s-2)(s-1)}$$

haciendo $s=1$; $s=2$; $s=-4$ y identificando los numeradores

$$\begin{cases} -5C = 6 \Rightarrow C = -\frac{6}{5} \\ 6B = 13 \Rightarrow B = \frac{13}{6} \\ 30A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{30} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{30}\frac{1}{s+4} + \frac{13}{6}\frac{1}{s-2} - \frac{6}{5}\frac{1}{s-1}$$

Haciendo la transformada inversa

$$\boxed{y = \frac{1}{30}e^{-4t} + \frac{13}{6}e^{2t} - \frac{6}{5}e^{t}}$$

Esta ecuación lineal también se puede resolver directamente

(b) Resuelta de manera directa esta misma ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}$$

1) Solución de la homogénea

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$p(m) = m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$= (m-2)(m-1)$$

$$y_H = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t}$$

2) Solución particular de la completa

Ensayamos $y_p = A e^{-4t}$

$$y_p' = -4A e^{-4t}$$

$$y_p'' = 16A e^{-4t}$$

$$16A e^{-4t} + 12A e^{-4t} + 2A e^{-4t} = e^{-4t}$$

$$\Rightarrow (16A + 12A + 2A) e^{-4t} \stackrel{!}{=} 1 \cdot e^{-4t}$$

$$\Rightarrow 30A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{30}$$

Por tanto $y_p = \frac{1}{30} e^{-4t}$

3) Solución general de la completa

$$y = y_H + y_p$$

$$\boxed{y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} + \frac{1}{30} e^{-4t}}$$

4) Determinamos las constantes usando las condiciones iniciales

$y(0)=1$

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{30} = 1$$

$y'(0) = 3$

$$y' = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} - \frac{4}{30} e^{-4t}$$

$$* \quad 2c_1 + c_2 - \frac{4}{30} = 3$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{29}{30} \\ 2c_1 + c_2 = \frac{94}{30} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 30c_1 + 30c_2 = 29 \\ 60c_1 + 30c_2 = 94 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 30 & 30 & 29 \\ 60 & 30 & 94 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 30 & 30 & 29 \\ 0 & -30 & 36 \end{array}\right) \sim \begin{cases} c_1 = \frac{65}{30} \\ c_2 = -\frac{36}{30} \end{cases}$$

En definitiva, la solución del problema de Cauchy es

$$y = -\frac{36}{30} e^{t} + \frac{65}{30} e^{2t} + \frac{1}{30} e^{-4t} =$$

$$= \frac{1}{3} e^{-4t} \left[-36 e^{5t} + 65 e^{6t} + 1\right]$$

$$\boxed{y = -\frac{6}{5} e^{t} + \frac{13}{6} e^{2t} + \frac{1}{30} e^{-4t}}$$